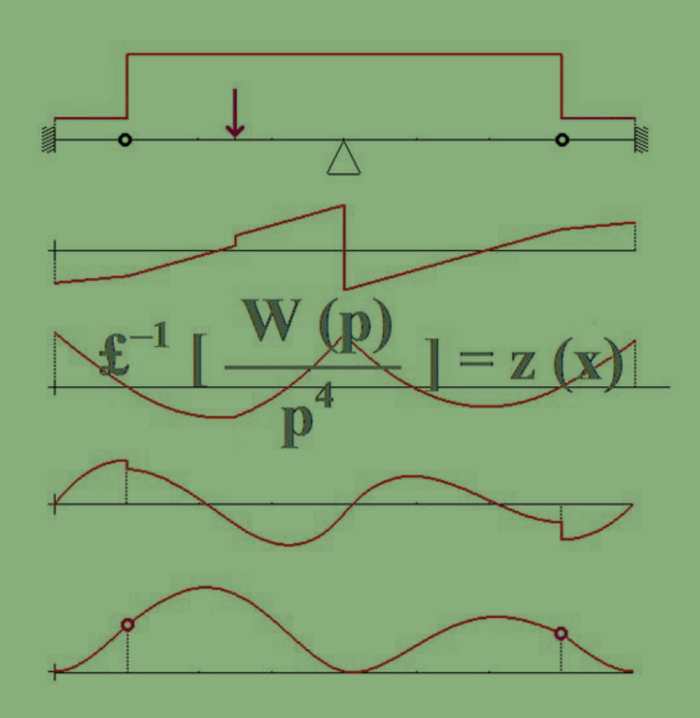
LA TRANSFORMADA DE LAPLACE Y EL ANÁLISIS DE LA FLEXIÓN SIMPLE EN VIGAS RECTAS DE RIGIDEZ CONSTANTE

por

PEDRO GALÁN DEL SASTRE

RAMÓN J. ZOIDO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-53-06

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE Y EL ANÁLISIS DE LA FLEXIÓN SIMPLE EN VIGAS RECTAS DE RIGIDEZ CONSTANTE

por

PEDRO GALÁN DEL SASTRE

RAMÓN J. ZOIDO

CUADERNOS

DEL INSTITUTO

JUAN DE HERRERA

DE LA *ESCUELA DE*

ARQUITECTURA

DE MADRID

3-53-06

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

La transformada de Laplace y el análisis de la flexión simple en vigas rectas de rigidez constante.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 418.01 / 3-53-06
ISBN-13: 978-84-9728-491-2
Depósito Legal: M-17380-2014

Dentro del campo de la Matemática Aplicada, el objeto de este cuaderno es mostrar la adaptación de los métodos de transformación para acomodarlos a problemas específicos que son objeto de interés en el campo de la ingeniería y la arquitectura. El uso de la transformada de Laplace es un método clásico que simboliza perfectamente este tipo de procedimientos. En el texto se realiza en primer lugar un conciso recorrido por esta transformada para pasar a describir inmediatamente la puesta a punto de sus procedimientos propios con el fin de adaptarlos al cálculo de las funciones de estado –deformación y esfuerzo– en la teoría de vigas rectas de rigidez constante bajo las hipótesis tradicionales que nos permiten tratarlas como modelos unidimensionales. En algunos casos se han reducido las precisiones teóricas para dar preferencia a los ejercicios que son los que muestran, de forma práctica, los procedimientos de manera sistemática que es la finalidad principal de este trabajo. Es oportuno añadir que en una primera composición del texto con múltiples cálculos e ilustraciones es inevitable la aparición de erratas e imprecisiones que se irán corrigiendo en revisiones posteriores.

Pedro Galán del Sastre
Ramón J. Zoido
Mayo 2014

La Transformada de Laplace
y el análisis de la
Flexión Simple en vigas rectas de rigidez constante

ÍNDICE

Φ 1 La transformada de Laplace………………………………………………………………………. 1
§ 1.1 Algunas cuestiones referentes a la transformada £………………………………………. 1
§ 1.2 Campo de aplicación de la transformada………………………………………………… 2
§ 1.3 Transformadas de los operadores………………………………………………………… 4
§ 1.3.1 Derivación e Integración………………………………………………………………… 4
§ 1.3.2 Traslación en el dominio de la "x" y en el de la "p"……………………………………….. 5
§ 1.3.3 Transformada de un producto de funciones………………………………………………. 6
§ 1.3.4 Producto de transformadas. La integral de la convolución. ………………………………….. 7
§ 1.3.5 Cambio de escala en "x" y en "p"……………………………………………………………. 8
§ 1.3.6 Multiplicación y división por "x"…………………………………………………………….. 8
§ 1.4 Transformadas de las funciones……………………………………………………………… 8
§ 1.4.1 Transformada de una constante…………………………………………………………… 8
§ 1.4.2 Transformadas de las funciones potenciales. Transformada de un polinomio……………… 9
§ 1.4.3 Transformadas de las funciones exponenciales………………………………………………. 10
§ 1.4.4 Transformadas de las funciones trigonométricas sen wx y cos wx………………………… 10
§ 1.5 Generación de otras transformadas…………………………………………………………... 10
§ 1.6 Teoremas del "valor inicial" y del "valor final"……………………………………………... 11
§ 1.7 La transformada inversa………………………………………………………………………. 11
§ 1.7.1 Desarrollo en fracciones simples……………………………………………………………. 12
§ 1.7.2 Los mapas de polos-ceros……………………………………………………………………... 13
§ 1.7.3 Acerca de la fórmula de Mellin-Fourier y del método de los residuos……………………….. 14
Φ 2 Las funciones "escalón", "impulso δ" y "momento"………………………………………………. 15
§ 2.1 Función escalón………………………………………………………………………………... 15
§ 2.2 Función impulso δ o función "delta" de Dirac…………………………………………………. 17
§ 2.3 Relaciones formales entre las funciones escalón e impulso. Función "momento"………………… 18
Φ 3 Transformadas de las funciones segmentariamente continuas y de los impulsos "δ" y momentos "δ′"………………………………………………………………………………………….. 21
§ 3.1 Transformadas de la función escalón, impulso e impulso de Dirac……………………………... 21
§ 3.2 Transformada de f(x −a) u(x−a) y de f(x) u(x− a)…………………………………………… 22
§ 3.3 Transformadas de las funciones periódicas generadas con una función g(x) en el primer período…………………………………………………………………………………………… 22
Φ 4 Aplicaciones de la transformada…………………………………………………………………….. 24
§ 4.1 Integración de la ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes reales…………… 24
Φ 5 Análisis de vigas de rigidez constante……………………………………………………………….. 25
§ 5.1 Las funciones de deformación y esfuerzo en los seis casos estándar……………………………….. 26
§ 5.1.1 Viga empotrada–libre…………………………………………………………………………. 27
§ 5.1.2 Viga libre–empotrada…………………………………………………………………………. 27
§ 5.1.3 Viga apoyada–apoyada………………………………………………………………………... 27
§ 5.1.4 Viga empotrada–apoyada……………………………………………………………………….. 28
§ 5.1.5 Viga apoyada-empotrada……………………………………………………………………….. 28
§ 5.1.6 Viga empotrada-empotrada…………………………………………………………………….. 28
§ 5.2 La función z(x) y sus derivadas………………………………………………………………… 29
§ 5.3 Acciones aisladas en los extremos. Las particularizaciones de la función z(x) para los valores de x = L…………………………………………………………………………………………… 31
§ 5.4 Precisión acerca de los signos implícitos en el análisis de la flexión simple para las cargas y Momentos…………………………………………………………………………………………... 32
Φ 6 Ejemplos de aplicación…………………………………………………………………………………... 33
Φ 7 Extensión a las vigas "continuas"…………………………………………………………………… 42
§ 7.1 Reducibles a modelos estándar…………………………………………………………………….. 43
§ 7.2 Vigas continuas con voladizos en los extremos………………………………………………………. 46
Φ 8 Extensión a las vigas "compuestas"…………………………………………………………………. 49
Φ 9 Las líneas de influencia……………………………………………………………………………… 55

Φ 1 La transformada de Laplace.

Se entiende por transformada de Laplace **£** una aplicación entre un cierto conjunto de funciones reales de variable real "x" definidas en $[0, \infty)$ y el conjunto de funciones de variable "p" compleja, $p = \sigma + i\, w$, definidas en un semieje (α, ∞), o sea: para valores de σ superiores a un cierto valor real α. Una característica principal de la transformada es la de ser una aplicación lineal entre espacios vectoriales. Posteriormente precisaremos ciertas condiciones suficientes para que las funciones originales f(x) tengan transformada F(p). El espacio imagen está caracterizado por funciones analíticas en el campo complejo pero nuestro interés excluye caracterizar tanto el dominio imagen de la transformada como el estudio de la imagen geométrica de la función racional F(p) en el plano de Gauss. En la mayor parte de los problemas y desde luego en los que estamos aquí interesados el que "p" sea considerada real o compleja no va a tener ninguna relevancia así que podrá ser visto como un simple parámetro –real, si se quiere– ya que la ventaja de considerar a "p" una variable compleja sobreviene casi exclusivamente al pretender disponer de una expresión general para la transformada inversa £^{-1}. El tratamiento en el que estamos interesados implicará el manejo reiterativo de algunas tablas de transformadas bastante reducidas que nos va a permitir sistematizar racionalmente el uso de estos métodos de transformación aplicados al análisis de la flexión simple en barras de rigidez constante.

§ 1.1 Algunas cuestiones referentes a la transformada £.

La transformada de Laplace queda definida por la siguiente integral impropia:

$$\text{£}\,[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-p\,x}\, f(x)\, dx = F(p) \qquad (1)$$

que es, además una integral paramétrica dependiente de "p" y por lo tanto una función F(p) denominada "transformada de Laplace de f(x)".La aplicación **£** está naturalmente restringida a las funciones que posean transformada lo que implica que las funciones transformables dependen de la convergencia de la integral (1) a la que está supeditada la propia expresión de la transformada.

El campo fundamental de las funciones que contemplamos preferentemente en los problemas técnicos unidimensionales es aquel que en un cierto intervalo [0, L] las funciones admiten en cada punto límites finitos a derecha e izquierda. Si estos límites en algún punto no son iguales habrá en ese punto una discontinuidad "de primera especie" –en el sentido clásico– o bien "un salto finito". Denominaremos a estas funciones "segmentariamente continuas" en el intervalo. Además, para garantizar la existencia de transformadas a estas funciones segmentariamente continuas se les deberá exigir la condición adicional de ser exponencialmente acotadas lo que significa que deben satisfacer para cada x > a el que existan dos números reales "C" y "α" tales que

$$|f(x)| < C\, e^{\alpha\, x} \qquad \text{o bien} \; |f(x)\; e^{-\alpha\, x}| < C$$

El conjunto de las funciones segmentariamente continuas y exponencialmente acotadas forman un espacio vectorial real. Con f(x) perteneciente a este conjunto de funciones la integral $\int_0^{\infty} f(x)\, e^{-p\,x}\, dx$ es acotada y f(x) posee transformada de Laplace para $p > \alpha$. Trivialmente si la función f(x) es acotada es también exponencialmente acotada para $\alpha = 0$, así que si f(x) cumple el resto de condiciones admitirá transformada de Laplace para p > 0. Una cota de la integral (1) será simplemente k/p siendo "k" la cota superior de f(x).

Observamos, además, que el límite inferior de la integral (1) es cero con lo que funciones como las representadas en la figura 1.1 siendo continuas en $(0,\infty)$ tendrían la misma transformada. Para restablecer la uniformidad de la transformada inversa podemos considerar, en principio, que las funciones consideradas sean f(x) = 0 para x < 0. Posteriormente la función "escalón" –de Heaviside– nos permitirá resolver formalmente esta situación.

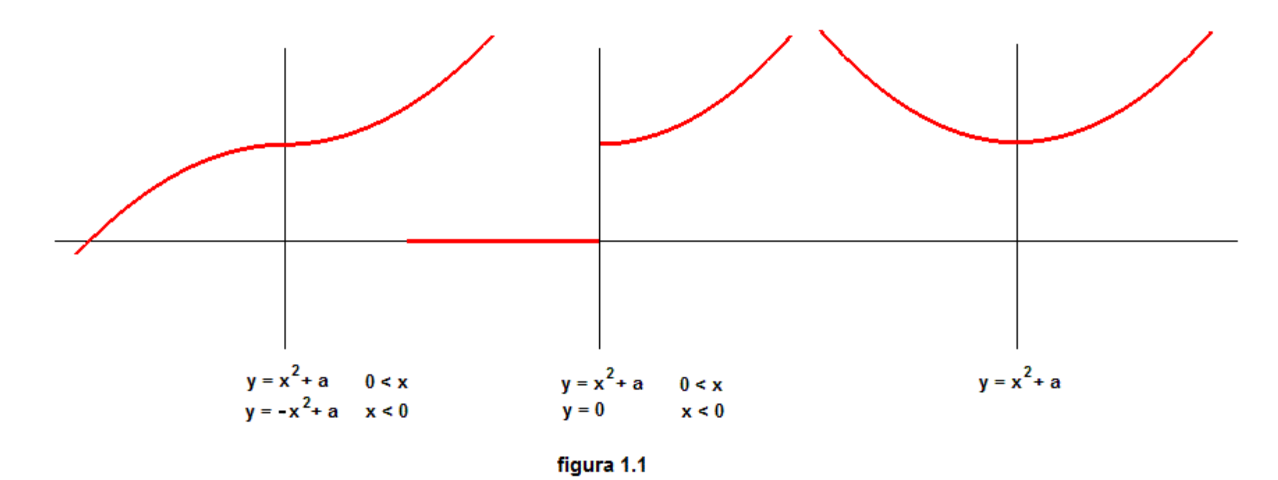


figura 1.1

Resumiendo: podemos exigir como condiciones suficientes para que una función f(x) tenga transformada de Laplace las siguientes

- que para x<0 sea f(x) = 0
- que en [0,∞) sea segmentariamente continua pudiendo existir un número finito de puntos de discontinuidad de primera especie.
- que en [0,∞) sea exponencialmente acotada.

Estas precisiones matemáticas no van a interferir en nuestro campo de trabajo. La mayoría de las funciones utilizadas normalmente en la técnica y, desde luego, las que aquí vamos a considerar poseen transformada y esto es consecuencia, entre otras cosas, de que dichas funciones decrecen menos rápidamente que la función exponencial e^{-px} teniendo en cuenta que podemos elegir el valor "p" de dicha función. Esta elección del "p" suficiente, incide, como ya se ha sugerido, en el intervalo del plano imagen en el que F(p) queda bien definida. Esta última cuestión puede ponerse de manifiesto si el $\lim_{x\to\infty} e^{-px} f(x) = 0$ para valores convenientes de $p > \alpha$.

Finalmente podemos añadir que desde el punto de vista operacional la transformada **£** puede ser considerada un operador integral caracterizado desde la forma general

$$F(p) = \int_m \eta(p,x)\, f(x)\, dx$$

donde $\eta(p, x)$ es una función analítica que en el caso de la transformada de Laplace es la función e^{-px} siendo el intervalo $m = [0, \infty)$. Otras transformadas notables son las de Fourier, las finitas de Fourier sen y cos, la de Mellin, la de Hankel o la de Legendre...etc. Junto a ellas puede recordarse la transformada $\mathfrak{Z}$ definida por $\mathfrak{Z}\,[f(x)] = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)\, z^{-x}$ que ocupa, en cierto modo, el mismo papel que **£** para el estudio de sistemas con señales discretas.

§ 1.2 Campo de aplicación de la transformada.

El contexto más idóneo de la transformada de Laplace resulta ser el de las ecuaciones diferenciales consecuencia de modelos y dispositivos físicos de respuesta lineal. En los sistemas dinámicos la variable "x" es la temporal con lo cual que se comprende que físicamente la restricción f(x) = 0 para x< 0 resulta obvia. Asimismo, en los problemas mecánicos o elásticos en los que estamos interesados como el de la viga-ménsula de sección constante y longitud "L" de la figura 1.2, una vez asimilada a un modelo unidimensional, la deformación y(x) en el intervalo [0, L], carece de sentido para x<0 así como para x > L.

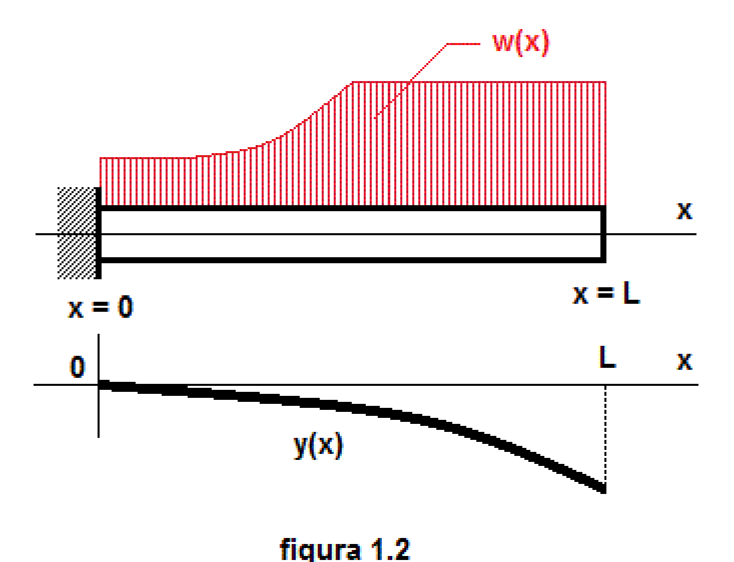
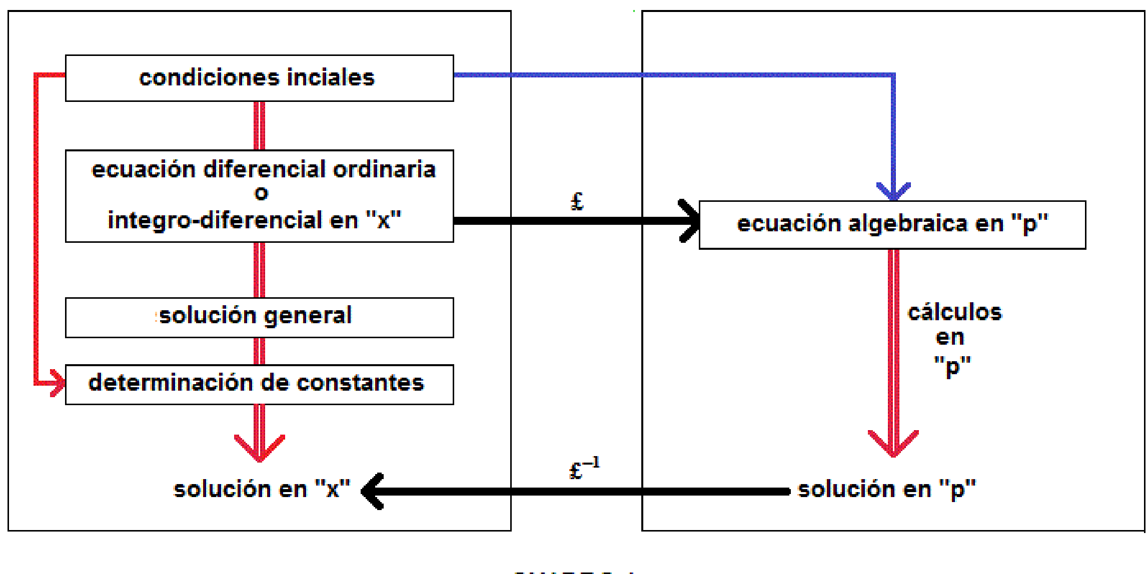


figura 1.2

La utilización usual de la transformada se presenta en la resolución de problemas regidos por ecuaciones diferenciales lineales o integro-diferenciales en el dominio de la variable "x". Mediante la transformada **£** llevamos esta ecuación al dominio de la variable "p" donde se resuelve con operaciones algebraicas elementales y posteriormente con la transformada inversa $£^{-1}$ se restituye al dominio original según se muestra en el diagrama del cuadro 1.



CUADRO 1

El paso entre ambos dominios se realiza en los casos más sencillos mediante tablas con operaciones complementarias de operaciones para su aprovechamiento exhaustivo. En el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con condiciones iniciales dadas, esto es: en los problemas "de valor inicial", la resolución presenta bastantes ventajas sobre los métodos clásicos hasta el punto de que el estudio de un amplio conjunto de sistemas lineales eléctricos, electromecánicos, de control etc. se precisan y se analizan en el propio dominio de la "p" (funciones de transferencia, mapas de polos y ceros, etc.). Estas ventajas se pueden poner de manifiesto, en una primera estimación, en los siguientes aspectos:

- La solución puede ser obtenida de forma sistemática mediante tablas, en este sentido y salvando las distancias se asemejaría a la antigua utilización de logaritmos.
- Las condiciones iniciales se incorporan a la propia transformación. No hay determinación posterior de constantes.

- En determinados problemas, la transformada puede ofrecer información más amplia y completa en el propio dominio de la "p"

En el análisis de la flexión simple de barras rectas una vez reducido el problema a un modelo unidimensional lineal con condiciones en los extremos, tendremos que adaptar los métodos naturales de la transformada para su utilización sistemática a problemas que no son problemas "de condiciones iniciales" sino de condiciones en los extremos o "de contorno". Esta adaptación se realizará en el **Φ 5** estableciendo previamente los distintos tipos estándar de sustentación en las vigas.

Ahora, nuestro primer paso será construir esas tablas de transformadas tanto para las funciones elementales que centran nuestro interés como para los operadores.

§ 1.3 Transformadas de los operadores

§ 1.3.1 Derivación e Integración.

Suponemos conocida £ [f(x)] = F(p) y queremos hallar la transformada de la derivada siendo f(x) diferenciable en x > 0 y f ′(x) transformable Laplace. Aplicando la definición

$$\text{£}\,[f'(x)] = \int_0^\infty e^{-p x}\, f'(x)\, dx$$

y resolviendo esta integral por partes, obtenemos

$$\text{£}\,[f'(x)] = e^{-p x} f(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty p\, e^{-p x} f(x)\, dx$$

como debe ser el $\lim_{x\to\infty} e^{-p x} f(x) = 0$, resulta

$$\text{£}\,[f'(x)] = -\,f(0) + p\int_0^\infty e^{-p x} f(x)\, dx = p\,F(p) - f(0)$$

Este resultado puede ser reiterado para hallar f″(x) supuesta f(x) derivable dos veces en x > 0 y f″(x) transformable. Siendo g(x) = f′(x)

$$\text{£}\,[f''(x)] = p\,\text{£}\,[f'(x)] - g(0) = p\,(p\,F(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - p\,f(0) - f'(0)$$

y, supuesta f(x) diferenciable "n" veces en x > 0 y la existencia de £ $[f^{n}(x)]$, se obtendrá

$$\text{£}\,[f^{(n}(x)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - p\, f^{(n-2}(0) - f^{(n-1}(0)$$

Utilizaremos para la función y(x) las siguientes transformaciones, con £[y(x)] = Y(p):

$y'(x)$……**£**…..$p\,Y(p) - y(0)$; $y'''(x)$…..**£**…..$p^3\,Y(p) - p^2\,y(0) - p\,y'(0) - y''(0)$

$y''(x)$…..**£**…..$p^2\,Y(p) - p\,y(0) - y'(0)$; $y^{IV}(x)$…..**£**…..$p^4\,Y(p) - p^3\,y(0) - p^2\,y'(0) - p\,y''(0) - y'''(0)$

En cada caso hemos considerado la continuidad de las funciones f(x), f′(x),…, $f^{n}(x)$ para valores x > 0.Estamos, sin embargo, tratando con funciones segmentariamente continuas que sean transformables así que cuando aparezcan discontinuidades de salto finito estas fórmulas deberán ser corregidas. Estas correcciones se explicarán más adelante y se superarán formalmente con el auxilio de las funciones "escalón" e "impulso" por lo que estas precisiones pueden no ser tenidas ahora en cuenta. No obstante si f(x) es discontinua en x = a punto de encuentro de sectores continuos con límites finitos distintos a la derecha $f(a^+)$ y a la izquierda $f(a^-)$ del punto en cuestión –figura 1.3–, la fórmula correcta de aplicación de la transformada de la primera derivada sería

$$\text{£}\,[f'(x)] = p\,F(p) - f(0) - e^{-a p}(\,f(a^+) - f(a^-)\,)$$

De la misma manera, si es f(x) diferenciable en x > 0 pero f′(x) no es continua en x = a –con salto finito–, siendo f″(x) transformable, obtendríamos la fórmula

$$\text{£}\,[f''(x)] = p^2 F(p) - p\,f(0) - f'(0) - e^{-a p}(f'(a^+) - f'(a^-)\,) \qquad \text{etc…}$$

En cada caso se observa que el factor $g(a^+) - g(a^-)$ es la contribución de las discontinuidades, siendo su valor absoluto el denominado "salto" de la función discontinua. En nuestro contexto estas discontinuidades estarán generalmente formadas por dos funciones diferentes a derecha e izquierda

cuyos valores en el punto son distintos con lo que el salto será de la forma $f_{j+1}(a_k) - f_{j-1}(a_k)$ tal y como se muestra en la figura 1.4.

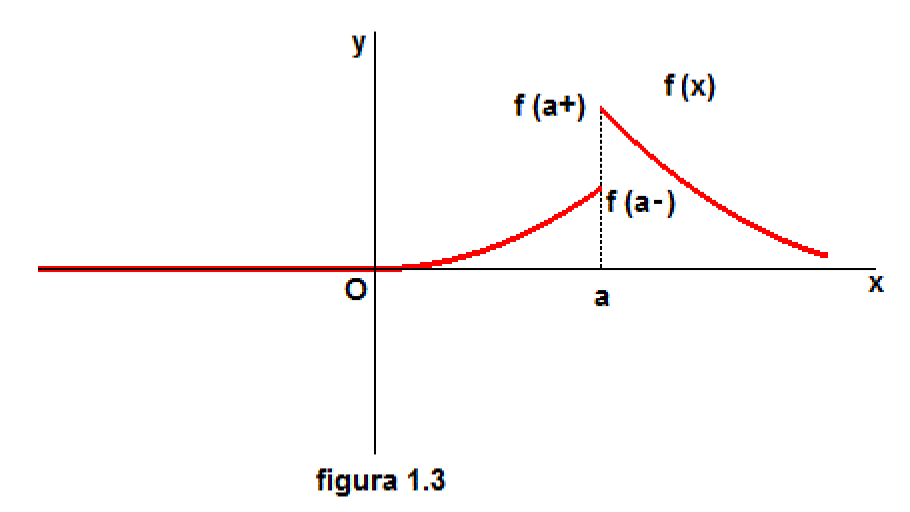


figura 1.3

Supuesto ahora f(x) integrable en x >0 y $\int_0^x f(s)\,ds$ una función transformable, la transformada de la integral:

$£\,[\int_0^x f(s)\,ds] = \int_0^\infty e^{-px}(\int_0^x f(s)\,ds)\,dx$

puede ser realizada por partes obteniendo

$£\,[\int_0^x f(x)\,dx] = -\frac{1}{p}\, e^{-px} \int_0^x f(s)\,ds \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{p}\, e^{-px}\, f(x)\,dx$

Si f(x) tiene transformada $\lim_{x\to\infty} e^{-px} \int_0^x f(s)\,ds = 0$ y de aquí se deduce que

$£\,[\int_0^x f(x)\,dx] = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-px}\, f(x)\,dx = \frac{F(p)}{p}$

y se puede escribir además

$£\,[\int_0^x dx \int_0^x dx \ldots\text{(k veces)}\ldots \int_0^x f(x)\,dx] = \frac{F(p)}{p^k}$

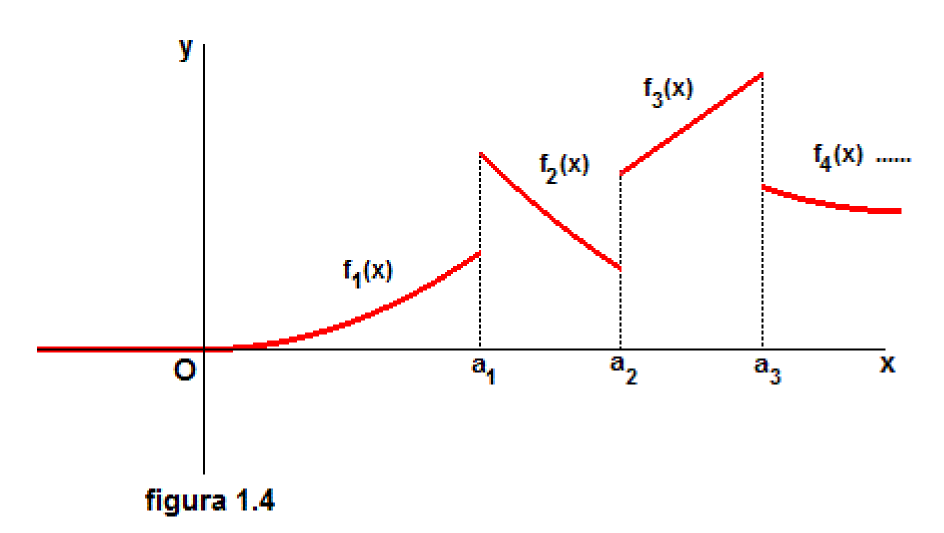


figura 1.4

§ 1.3.2 Traslación en el dominio de la "x" y en el de la "p".

Conocida **£** [f(x)] = F(p), la transformada de **£** [f(x–a)] será la integral

$£\,[f(x-a)] = \int_0^\infty e^{-px}\, f(x-a)\,dx = e^{-pa} \int_0^\infty e^{-p(x-a)}\, f(x-a)\,d(x-a) = e^{-pa}\, F(p)$

Este resultado es válido solamente para $x > a$. Si a la función f(x) le hemos exigido que sea f(x) = 0 para x< 0 deberá ser f(x – a) = 0 para x< a, como se muestra en la figura 1.5, de manera que el resultado sería válido en todo el semieje real positivo. Podemos presentar, no obstante, la transformada en la forma

£ $[f(x-a)] = e^{-pa} F(p)$, $a \geq 0$, siendo $f(x-a) = 0$ para $x < a$

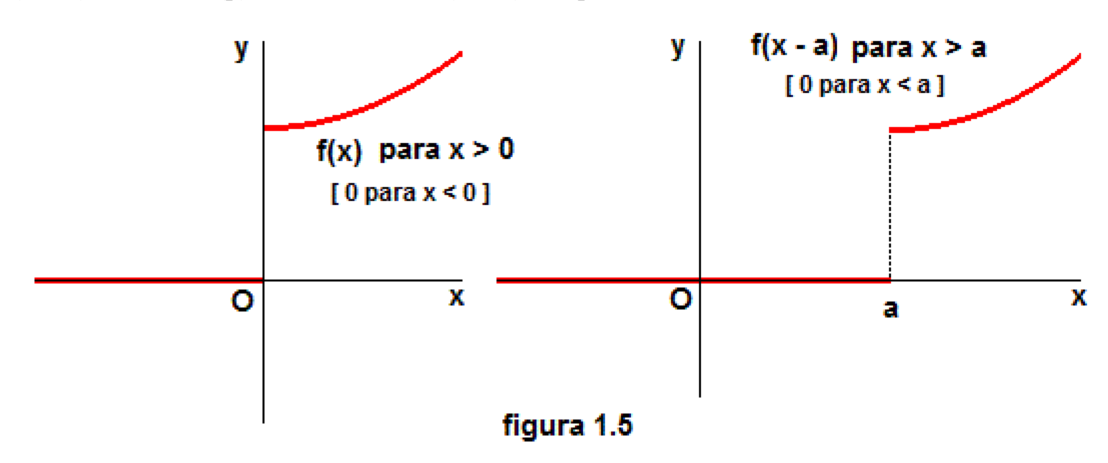


figura 1.5

Como en otras transformadas, este resultado será formalmente enunciado sin ninguna precisión adicional, de manera muy simple con auxilio de la función escalón en el **Φ 2**.
Análogamente podremos escribir

£ $[f(x)\, e^{-ax}] = \int_0^\infty e^{-px} e^{-ax} f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-(p+a)x} f(x)\, dx = F(p+a)$ con $a \geq 0$

Ambos resultados: traslación en el dominio de la "x" y en el de la "p", que nos permitirán generar nuevas transformadas, se garantizan como máximo en el semiplano complejo derecho de la "p" o a partir de $p > 0$ si f(x) es acotada.

§ 1.3.3 Transformada de un producto de funciones.

Hallar **£** $[f_1(x)\, f_2(x))]$ disponiendo de **£** $[f_1(x)] = F_1(p)$ y **£** $[f_2(x)] = F_2(p)$ requiere del conocimiento de la integración en el campo complejo y es consecuencia de abordar el estudio general de la transformada inversa **£**$^{-1}$. Su aplicación estricta no es frecuente en el tipo de problemas en el que estamos interesados por lo que quedaría aquí fuera de contexto. No obstante, es posible encontrar dicha transformada por operaciones elementales. Así ocurre cuando la transformada racional de al menos una de las funciones, por ejemplo $f_1(x)$ pueda ser descompuesta en fracciones y no posea más que polos simples; es decir si

$F_1(p) = \frac{A}{p-a} + \frac{B}{p-b} + \frac{C}{p-c} + \ldots$

Sabiendo que la transformada de una constante es **£** $[k] = \frac{k}{p}$ (resultado que se verá posteriormente en el **§ 1.4.1)** , teniendo en cuenta que **£** $[f(x)\, e^{-ax}] = F(p+a)$ y la linealidad de **£**, entonces $f_1(x)$ será:

$f_1(x) = A\ e^{-ax} + B\ e^{-bx} + C\ e^{-cx} + \ldots$

y, en este caso, se obtiene de forma inmediata:

£ $[f_1(x)\, f_2(x)] =$ **£**$[Ae^{-ax} f_2(x) + Be^{-bx} f_2(x) + Ce^{-cx} f_2(x) + \ldots] = A\, F_2(p-a) + B\, F_2(p-b) + C\, F_2(p-c) + \ldots$

sea cual sea $f_2(x)$ a condición de que posea transformada $F_2(p)$. Esta transformación es representativa de algunas operaciones usuales en el dominio de la "p". Posteriormente podremos ampliar esta cuestión con un carácter más general.

§ 1.3.4 Producto de transformadas. La integral de la convolución.

Uno de los resultados más importantes de la teoría de transformadas de Laplace aparece al estudiar la función primitiva de un producto de dos funciones transformadas $F_1(p)$ y $F_2(p)$ en función de sus originales. El resultado obtenido no jugará solamente un papel en el cálculo sino que puede configurar todo un desarrollo en cierto modo independiente y dando lugar a una nueva operación que se proyecta en muchos problemas físicos. Se trata de hallar $\mathbf{£}^{-1}$ $[F_1(p)\, F_2(p)]$ siendo $\mathbf{£}[f_1(x)] = F_1(p)$ y $\mathbf{£}[f_2(x)] = F_2(p)$.

Podemos expresar dicho producto en la forma:

$$F_1(p)\, F_2(p) = \int_0^\infty e^{-p\,u}\, f(u)\, du \ \int_0^\infty e^{-p\,v}\, f(v)\, dv$$

y transformar este producto en una integral doble en el recinto R(u, v): $0\leq u\leq \infty$, $0\leq v\leq \infty$ –según la figura 1.6 (a– con lo que este producto quedaría

$$F_1(p)\, F_2(p) = \int_{u=0}^\infty \int_{v=0}^\infty e^{-p\,(u+v)}\ f_1(u)\, f_2(v)\, du\, dv= \iint_{R(u,v)} f_1(u)\, f_2(v)\, e^{-p\,(u+v)}\, du\, dv$$

Este desdoblamiento de las variables antecede para nuestros propósitos a un plegamiento del recinto mediante el cambio de variable definido por $u = x - \tau$, $v = \tau$, aplicación biyectiva y bicontinua, continuamente diferenciable, siendo el Jacobiano de la transformación igual a la unidad, así que podemos pasar de las coordenadas u,v a las x,τ y el cambio da lugar a la integral:

$$F_1(p)\, F_2(p) = \iint_{R(x,\tau)} e^{-p\,x}\, f_1(x-\tau)\, f_2\,(\tau)\ \ dx\, d\tau$$

el recinto $u \geq 0$, $v \geq 0$ se transformará en $x \geq \tau$, $\tau \geq 0$ que es el representado en la figura 1.6 (b

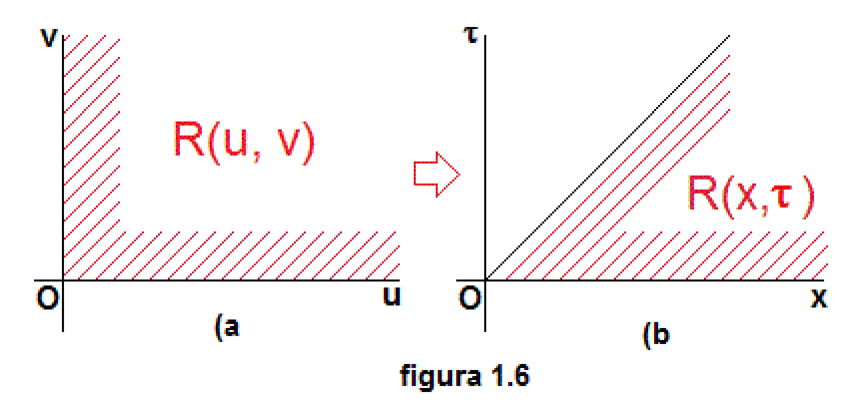


figura 1.6

Podemos expresar ahora el producto de transformadas en la forma:

$$F_1(p)\, F_2(p) = \int_{\tau=0}^{\tau=x} \quad \int_{v=0}^\infty e^{-p\,x}\, f_1(x-\tau)\, f_2(\tau)\, dx\, d\tau = \int_0^\infty e^{-p\,x}\, (\int_0^x f_1(x-\tau)\, f_2(\tau)\ \ d\tau)\, dx$$

así que el resultado buscado puede venir expresado mediante una integral

$$\mathbf{£}^{-1}[\ F_1(p)\, F_2(p)] =\int_0^x f_1(x-\tau)\, f_2(\tau)\ \ d\tau$$

que es una integral dependiente del parámetro "x" y por ello la función de "x" buscada. Esta igualdad puede ser vista en la forma directa:

$$\mathbf{£}[\int_0^x f_1(x-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau] = F_1(p)\, F_2(p)$$

Puede ahora formalizarse una operación denominada "producto de convolución" o simplemente "convolución" de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_0^x f_1(x-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau$$

y expresar el resultado de la transformación $\mathbf{£}[f_1(x) * f_2(x)] = F_1(p)\, F_2(p) = \mathbf{£}[f_1(x)]\ \mathbf{£}[f_2(x)]$.

La operación así definida puede ser estudiada para averiguar la estructura que aporta a cierta clase de funciones. Si las dos funciones son continuas su producto-convolución existe. En estas condiciones esta operación resulta cerrada, conmutativa, asociativa y distributiva. Para que no siendo

continua las funciones originales la integral sea convergente será suficiente que ambas sean acotadas en cualquier intervalo del semieje real positivo. Proporcionar una interpretación "física" de la convolución nos llevaría a plantear, fuera de nuestro contexto, problemas muy particularizados.

§ 1.3.5 Cambio de escala en "x" y en "p".

Conocida la transformada F(p) de la función f(x), la transformada de f(a x) y $f(\frac{x}{a})$ serán

$$£\,[f(a\,x)] = \int_0^\infty e^{-p\,x}\,f(a\,x)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}\,a\,x}\,f(a\,x)\,d(a\,x) = \frac{1}{a}\,F(\frac{p}{a}) \quad , \quad a \neq 0$$

$$£\,[f(\frac{x}{a})] = \int_0^\infty e^{-p\,x}\,f(\frac{x}{a})\,dx = a\int_0^\infty e^{-a\,p\,\frac{x}{a}}\,f(\frac{x}{a})\,d(\frac{x}{a}) = a\,F\,(a\,p) \quad , \quad a \neq 0$$

§ 1.3.6 Multiplicación y división por "x".

La transformada de x f(x) puede resolverse derivado la igualdad

$$£\,[f(x)] = \int_0^\infty e^{-p\,x}\,f(x)\,dx = F(p)$$

y se obtendrá

$$\frac{d\,F(p)}{dp} = \frac{d}{dp}\int_0^\infty e^{-p\,x}\,f(x)\,dx = \int_0^\infty -\,e^{-p\,x}\,x\,f(x)\,dx = -\,£\,[x\,f(x)]$$

así que $£\,[x\,f(x)] = -\frac{d\,F(p)}{dp}$.

Teniendo en cuenta las sucesivas derivaciones respecto del parámetro "p" de los productos $e^{-p\,x}\,f(x)$, podemos generalizar el resultado anterior para cualquier x^n f(x) con "n" entero positivo, obteniendo sin dificultad

$$£\,[x^n\,f(x)] = (-1)^n\,\frac{d^n\,F(p)}{dp^n} = (-1)^n\,F^{(n}(p)$$

De forma análoga, el cálculo de la transformada de $\frac{f(x)}{x}$ conocida la de f(x) se resolverá integrando adecuadamente en "p" la igualdad

$$\int_0^\infty e^{-p\,x}\,f(x)\,dx = F(p)$$

es decir, escribiendo

$$\int_p^\infty dk\int_0^\infty e^{-k\,x}\,f(x)\,dx = \int_p^\infty F(k)\,dk$$

que puede realizarse en la siguiente forma

$$\int_0^\infty \int_p^\infty e^{-k\,x}\,f(x)\,dx\,dk = \int_0^\infty f(x)\quad [-\frac{1}{x}\;e^{-k\,x}\,|_0^\infty\,]\,dx = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,e^{-p\,z}\,dx$$

así que $£\,[\frac{f(x)}{x}] = \int_p^\infty F(p)\,dp$

§ 1.4 Transformadas de las funciones.

Se trata ahora de encontrar las transformadas de un pequeño número de funciones elementales que son las que normalmente aparecen en las aplicaciones técnicas: polinómicas, exponenciales, circulares e hiperbólicas etc. que junto a la tabla de transformadas operacionales vistas anteriormente: cambios de escala en "x" y en "p", multiplicación por x^n con "n" entero, producto por la exponencial etc. nos permitan generar un más amplio conjunto de transformadas con menor cantidad de información inicial.

§ 1.4.1 Transformada de una constante.

Siendo k un número real, la transformada

$$£\,[k] = \int_0^\infty e^{-p\,x}\,k\,dx = -\frac{1}{p}\,k\,e^{-p\,x}\,|_0^\infty = \frac{k}{p}$$

En el campo de las transformadas de Laplace este resultado es algo impreciso: "k" debería ser un escalar que multiplique a una función nula para x < 0 que tendría por transformada $\frac{1}{p}$. Una vez más, esta función será la función "escalón" unitario u(x) que estudiaremos en el **§ 2.1** junto a algunas precisiones sobre su uso. Veremos que esta función escalón unitario vendrá representada por u(x) y que **£** [u(x)] = $\frac{1}{p}$ por lo que con mayor precisión escribiremos:

£ [k u(x)] = k **£** [u(x)] $=\frac{k}{p}$

esto garantizará, entre otras cosas, que la función original es nula para x < 0 como veremos posteriormente. En cualquier caso, el papel jugado por u(x) pasará a ser parte muy activa en el texto. Dicho lo cual, podremos prescindir de esta función en este y en otros casos prácticos cuando no sea imprescindible o cuando solamente adquiera un papel puramente formal en el cálculo como se sugirió en el **§ 1.2**.

§ 1.4.2 Transformadas de las funciones potenciales. Transformada de un polinomio.

Siendo "a" un número real positivo, la transformada de x^a será

£ $[x^a] = \int_0^\infty e^{-p\,x}\, x^a dx$

haciendo el cambio de variable p x = y, quedará para a > 0

£ $[x^a] = \int_0^\infty \left(\frac{y}{p}\right)^a e^{-y}\ \frac{dy}{p} = \int_0^\infty \frac{1}{p^{a+1}}\ y^a\ e^{-y}\ dy = \frac{1}{p^{a+1}}\,\Gamma(a+1)$

siendo Γ la función "gamma" denominada también integral euleriana de 2ª especie, convergente para valores mayores que cero y cuya primitiva no es expresable para valores no enteros mediante otras funciones que no sean la propia Γ. Cuando "a" es entero Γ(a) es el factorial (a –1)!. Cuando "a" es no entero se descompone usualmente en la parte entera más el resto de manera que solamente queda por utilizar una tabla de Γ para valores entre 0 y 1. En particular siendo, por ejemplo, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, será

£ $[\sqrt{x}] = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{p^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{p^{3/2}}$

Nuestro interés se centra en exponentes "n" enteros positivos para los cuales

£ $[x^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$ con n entero > 0

Serán de gran utilidad en las aplicaciones las transformadas particularizadas:

x	……………..............................**£**………………………………………	$\frac{1}{p^2}$
x^2	……………..............................**£**………………………………………	$\frac{2}{p^3}$
x^3	……………..............................**£**………………………………………	$\frac{6}{p^4}$

En consecuencia, teniendo en cuenta lo dicho, la transformada de un polinomio con coeficientes reales $P_r(x) = a_r\, x^r + a_{r-1}\, x^{r-1} + \ldots + a_1\, x + a_0$, será

£ $[P_r(x)] = \frac{a_r\, r!}{p^{r+1}} + \frac{a_{r-1}\,(r-1)!}{p^r} + \ldots\ldots + \frac{a_1}{p^2} + \frac{a_0}{p}$

Este resultado nos permite encontrar las transformadas de desarrollos en serie entera,

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(0)}{n!}\ x^n$

que nos pueden ser útiles para obtener las transformadas de funciones tales como a^x, e^{-x^2}…etc. Bastará tener en cuenta la transformada

£ $[\frac{f^{(n}(0)}{n!}\, x^n] = \frac{f^{(n}(0)}{p^{n+1}}$

y aplicar el carácter lineal de **£**.

§ 1.4.3 Transformadas de las funciones exponenciales.

Aplicando los resultados obtenidos anteriormente para la transformada de una constante y la traslación en "p"

k ……………..............................£…………………………….……… $\frac{k}{p}$

$e^{-a\,x}$ f(x) ……………..............................£…………………………….……… F(p +a)

podemos obtener directamente la transformada de la función $e^{-a\,x}$

£ $[e^{-a\,x}] = \frac{1}{p+a}$ con $a > 0$

y para la transformada de $e^{a\,x}$ podemos proceder de la misma forma

£ $[e^{a\,x}] = \frac{1}{p-a}$

resultado válido solamente para $p > a > 0$

§ 1.4.4 Transformadas de las funciones trigonométricas sen wx y cos wx.

Para obtener las transformadas de las funciones trigonométricas sen wx y cos wx puede procederse sobre la definición con una doble integración por partes o bien utilizar

$e^{a\,x}$ ……………..............................£…………………………….……… $\frac{1}{p-a}$

aplicándolo a la función $e^{i\,w\,x}$ = cos wx + i sen wx, es decir utilizando

$e^{i\,w\,x}$ ……………..............................£……………………… $\frac{1}{p-i\,w} = \frac{p+i\,w}{p^2+w^2}$

igualando las partes real e imaginaria se obtienen directamente

£ $[\cos wx] = \frac{p}{p^2+w^2}$; £ $[\text{sen } wx] = \frac{w}{p^2+w^2}$

§ 1.5 Generación de otras transformadas.

Las transformadas de las operaciones más significativas junto las transformadas de algunas de las funciones elementales nos permiten obtener nuevas transformadas sin tener que resolver las integraciones implicadas en la definición. Para la mayoría de funciones que utilizamos habitualmente en la técnica bastarán dos tablas muy económicas; una de funciones y otra de operaciones. Así, por ejemplo, teniendo en cuenta

x f(x)…………….. £…….........$-\frac{d\,F(p)}{dp}$; $e^{-a\,x}$ …………….. £…….........$\frac{1}{p+a}$

la transformada de x $e^{-a\,x}$ deberá ser:

£ $[x\,e^{-a\,x}] = -\frac{d(\frac{1}{p+a})}{dp} = \frac{1}{(p+a)^2}$

resultado que podemos obtener también utilizando las trasformaciones

f(x) $e^{-a\,x}$ ………….. £….….......F(p + a) ; x …………….. £…….........$\frac{1}{p^2}$

y con alcance general para "n" entero positivo

£ $[x^n\,e^{-a\,x}] = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

Teniendo en cuenta la transformada f(x) $e^{-a\,x}$ y las transformadas de sen wx y cos wx halladas anteriormente, obtenemos también directamente:

£ $[e^{-a\,x}\text{ sen } wx] = \frac{w}{(p+a)^2+w^2}$; £ $[e^{-a\,x}\cos wx] = \frac{p+a}{(p+a)^2+w^2}$

y considerando, además

x f(x)…………….. £……........– $\frac{dF(p)}{dp}$

resultan las siguientes transformadas

$$£\,[x \text{ sen } wx] = \frac{2p}{(p^2+w^2)^2} \quad ; \quad £\,[x \cos wx] = \frac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2}$$

Finalmente teniendo en cuenta las transformadas anteriores se pueden obtener fácilmente:

$$£\,[x\, e^{-a\,x} \text{ sen } wx] = \frac{2\,(p+a)}{((p+a)^2+w^2)^2} \quad ; \quad £\,[x\, e^{-a\,x} \cos wx] = \frac{(p+a)^2-w^2}{((p+a)^2+w^2)^2}$$

§ 1.6 Teoremas del "valor inicial" y del "valor final".

Si f(x) tiene transformada F(p) y es f′(x) transformable, podemos obtener dos resultados importantes que pueden deducirse de la expresión de la transformada de la derivada

$£\,[f'(x)] = \int_0^\infty e^{-p\,x}\, f'(x)\, dx = p\,F(p) - f(0)$

y puesto que f′(x) tiene transformada, el $\lim_{p\to\infty} \int_0^\infty e^{-p\,x}\, f'(x)\, dx = 0$, así que

$0 = \lim_{p\to\infty} p\,F(p) - f(0)$

y, de aquí, supuesta la continuidad de f(x) en x = 0

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{p\to\infty} p\,F(p)$

resultado conocido como el "teorema del valor inicial"

Si en la expresión de la transformada de la derivada calculamos el límite para p → 0

$\lim_{p\to 0} \int_0^\infty e^{-p\,x}\, f'(x)\, dx = \int_0^\infty f'(x)\, dx = f(x)\Big|_0^\infty = \lim_{x\to\infty} f(x) - f(0) = \lim_{p\to 0} p\,F(p) - f(0)$

habiendo supuesto la continuidad de f(x) en x = 0 de valor f(0) y por tanto

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{p\to 0} p\,F(p)$

denominado "teorema del valor final" dónde han de asegurarse la existencia de los límites implicados en la igualdad. Una forma de garantizar la última fórmula es que los polos del producto p F(p) se encuentren en la mitad izquierda del plano complejo de "p" ya que la presencia de polos en la mitad derecha corresponde a una función f(x) que crece –exponencialmente– sin límite cuando x crece y la presencia de polos sobre el eje imaginario significa la contribución de una oscilación permanente en f(x). Se trata de garantizar que p F(p) sea analítica en la mitad derecha del plano complejo de "p" incluyendo el eje $\sigma = 0$ de $p = \sigma + i\,w$.

§ 1.7 La transformada inversa.

Aquí se considera esencialmente la aplicación de la transformada a los problemas regidos por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y en estos casos F(p) resulta una función racional en general irreducible. Una utilización sistemática de las tablas de transformadas de las funciones y de los operadores es suficiente para encontrar las funciones originales en el dominio de la "x" y, en general, una tabla reducida a lo indispensable de transformadas inversas puede facilitar la lectura inmediata de las mismas para este tipo de funciones. En general, la obtención de transformadas inversas puede abordarse con diferentes alternativas que son complementarias y compatibles entre sí. Aquí bastará describir este cálculo mediante la descomposición previa de F(p) racional en sumas de fracciones simples o, en su caso, por desarrollos de F(p) en serie y aprovechar los resultados de las transformadas directas obtenidas para las funciones y para las operaciones vistas anteriormente incluyendo la del producto de transformadas.

A estos procedimientos habría que añadir algunas notas sobre los mapas de polos y ceros de la función F(p) que tienen cierto interés en determinado tipo de problemas físicos. Finalmente puede

darse alguna referencia al llamado método "de los residuos" semejante desde un cierto punto de vista práctico al de la descomposición en fracciones simples.

§ 1.7.1 Desarrollo en fracciones simples.

Siendo $\pounds^{-1}$ una transformación asimismo lineal, si abordamos la transformada inversa de la fracción irreducible F(p) que no esté directamente en una tabla reducida de transformadas el paso más inmediato es el de convertir esta función racional en suma de fracciones simples que sí encontraremos en dicha tabla.

Consideramos la función $F(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$ donde R(p) y Q(p) son polinomios de coeficientes reales siendo el grado de R(p) menor que el de Q(p). Necesitaremos el conocimiento de los ceros de Q(p) que son las raíces de Q(p) = 0 y que serán los polos "p_i" de F(p). Supuestos estos valores reales, la función racional resultará ser una suma de la contribución de cada p_i con orden de multiplicidad "k"

$$\ldots + \frac{A_k}{(p-p_i)^k} + \frac{A_{k-1}}{(p-p_i)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_2}{(p-p_i)^2} + \frac{A_1}{p-p_i} + \ldots$$

así que bastará con disponer en una tabla de transformadas inversas de funciones $\frac{A}{(p+a)^n}$

y para estas funciones es suficiente tener en cuenta

x^n ………...£…………..... $\frac{n!}{p^{n+1}}$; $f(x)\,e^{-a\,x}$ ……...... £……... $F(p + a)$

de las que se deduce fácilmente

$$\pounds\left[\frac{A}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-a\,x}\right] = \frac{A}{(p+a)^n}$$

Cuando el polo "p_i" es simple el numerador correspondiente a la fracción $\frac{A}{p-p_i}$ con la que contribuye a la descomposición en fracciones simples puede venir expresado por la siguiente fórmula

$$A = \frac{R(p_i)}{Q'(p_i)} = \frac{R(p)}{Q'(p)}\Big|_{p\,=\,p_i} \qquad p_i \text{ raíz simple de } Q(p) = 0$$

y esta es la alternativa que permite reflejar la "primera regla de Heaviside" o "teorema del desarrollo" que se enuncia de la siguiente manera:

"Siendo $F(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$, siendo el grado de R(p) es menor que el de Q(p), si todas las raíces de Q(p) = 0 son reales distintas $p_1, p_2, p_3,\ldots,p_n$, entonces $\pounds^{-1}[F(p)] = \sum_{j=1}^{n}\frac{R(p_j)}{Q'(p_j)}e^{p_j\,x}$ "

Cuando existan pares de raíces complejas conjugadas a ± i b, su contribución individual puede ser representada por la secuencia anterior con coeficientes complejos pero, como se sabe, se prefiere directamente describir la contribución de cada par a ± i b en el campo real por la fracción

$\frac{M\,p+N}{(p-a)^2+b^2}$, con M y N reales.

Partiendo de las transformadas de las funciones $e^{-a\,x}$ sen wx , $e^{-a\,x}$ cos wx vistas anteriormente y teniendo en cuenta el carácter lineal de £ se llega con facilidad a

$$\pounds\left[M\,e^{-a\,x}\left(\cos bx - \frac{a}{b}\,\text{sen}\,bx\right)\right] = \frac{M\,p}{(p+a)^2+b^2}$$

y de aquí a

$$\pounds\left[e^{-a\,x}\left(M\cos bx + \frac{N-M\,a}{b}\,\text{sen}\,bx\right)\right] = \frac{M\,p+N}{(p-a)^2+b^2}$$

En determinados problemas se prefiere escribir para las funciones en "x" anteriores la forma

$K\,e^{-a\,x}\,\text{sen}\,(bx+\phi)$ con $K = \frac{1}{b}\sqrt{(N-M\,a)^2 + M^2b^2}$, $\text{tg}\,\phi = \frac{M\,b}{N-M\,a}$.

Análogamente puede procederse con las raíces complejas múltiples.

Anotamos aquí como un recurso adicional el de los desarrollos en serie de las funciones F(p) y la posterior transformación inversa de los términos de este desarrollo. Para estos desarrollos es fundamentar el contar con la transformación

$\frac{A}{(n-1)!}\,x^{n-1}$…………**£**……........$\frac{A}{p^n}$

Básicamente esta transformada es la que justifica la "segunda regla de Heaviside" que puede transcribirse de la siguiente manera:

"Siendo la serie $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_p}{p^n}$ una serie de potencias convergente de p, se verifica que

$£^{-1}\,[F(p)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(n-1)!}\,x^{n-1}$"

§ 1.7.2 Los mapas de polos-ceros.

Sin entrar en consideraciones que nos alejan de la descripción práctica de la transformada y conservando a "p" simplemente como un parámetro cuyos valores pueden ser representados en el campo complejo, el caso que nos ocupa es el de las fracciones irreducibles de la forma $F(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$. Recordando que los polos son simplemente las raíces "p" de la ecuación Q(p) = 0 y visto todo lo anterior, se comprende que la forma de la función original $f(x) = £^{-1}[\,F(p)]$ queda determinada por estas raíces. El numerador no tiene influencia sobre la forma de la función original y por lo tanto no la tienen los ceros de F(p) que son las raíces de R(p) = 0. Estos últimos afectarían solamente a la amplitud y al desfase de una contribución del tipo $A\,e^{-a\,x}$ sen $(bx + \phi)$. Esta dependencia de f(x) de la situación de los polos de F(p) nos lleva a representar sobre el plano de Gauss su "mapa de polos-ceros". Con esta imagen geométrica no solamente puede reconstruirse la propia F(p) sino también deducir su transformada inversa por métodos gráficos.

Tomando por ejemplo la función $F(p) = \frac{p^2+2}{(p+1)^2\,(p+2)\,p}$, la representación de sus polos y ceros sobre el plano complejo será los de la figura 1.7 (a, donde los polos se representan por una "x" en tanto "o" será los ceros y entre paréntesis se precisa el orden de multiplicidad de cada raíz. El diagrama de la función $F(p) = \frac{p+3}{(p+2)(p+1)(p^2+1)}$ sería el representado en la figura 1.7 (b.

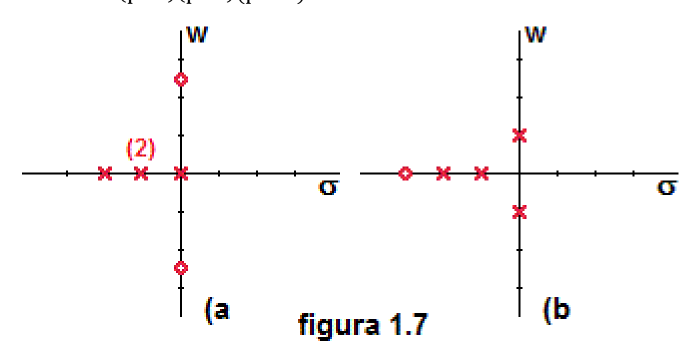


figura 1.7

En los sistema lineales dinámicos en los que la variable "x" es la temporal, el concepto de estabilidad es esencial y en estos casos la existencia de polos en la mitad derecha del plano de representación proporciona sistemas que crecen con el tiempo por lo que el sistema resulta inestable, los polos de la mitad negativa del eje real contribuyen con términos $t^{n-1}\,e^{-a\,t}$, según el orden de multiplicidad "n" del polo. Los polos complejos conjugados en la mitad izquierda del plano proporcionan ondas exponencialmente amortiguadas, los simples imaginarios puros proporcionan ondas senoidales sostenidas, los múltiples imaginarios puros proporcionan términos crecientes no exponenciales y los polos en la parte derecha del plano proporcionan términos crecientes en forma exponencial o exponencial-ondulatoria (figura 1.8).

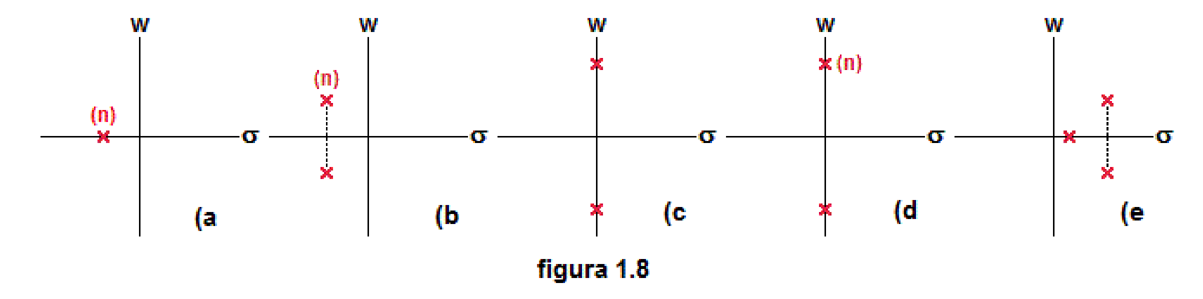


figura 1.8

§ 1.7.3 Acerca de la fórmula de Mellin-Fourier y del método de los residuos.

Bajo determinadas condiciones, es posible obtener de forma general la función f(x) transformada inversa de F(p).Estas condiciones están en relación directa con las exigidas a la función f(x) para que tenga imagen en el dominio de la "p". La fórmula que permite obtenerla es conocida como "fórmula de Mellin-Fourier"

$$\pounds^{-1}\,[F(p)] = \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\sigma_1 - i\,\infty}^{\sigma_1 + i\,\infty} F(z)\,e^{z\,x}\,dz = f(x) \qquad , x > 0$$

con z = σ + i w, variable compleja (σ y w reales). Es una integral a lo largo de la recta $\sigma = \sigma_1$ en el plano de Gauss, integral que depende del parámetro real "x". El valor σ_1 es $\sigma_1 > \alpha$, donde α es el valor que aseguraba la convergencia y por tanto la existencia de la integral $\int_0^\infty |f(x)|\,e^{-p\,x}\,dx$. La condición esencial para que esta fórmula sea válida es que el itinerario al que se extiende la integral, esto es: la recta perpendicular al eje real por σ_1 quede a la derecha de todas las posibles singularidades de la función F(p) y esto significa que F(p) es analítica en el semiplano a la derecha de dicha recta. Elegido σ_1 de esta manera $\pounds^{-1}\,[F(p)] = 0$ para $x < 0$ que es la condición impuesta en un principio para la que la función tenga transformada.

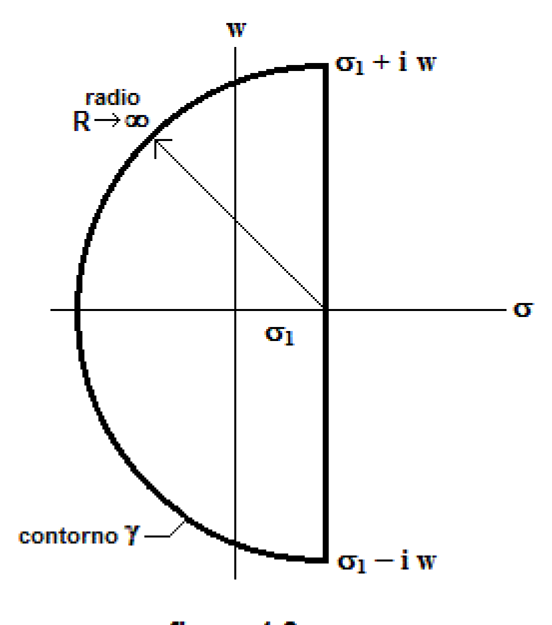


figura 1.9

Disponiendo de esta fórmula para la transformada inversa, se trata ahora de calcular de la forma más sencilla la integral del segundo miembro. Consideremos ahora la integral

$$\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_W F(p)\,e^{p\,x}\,dp \qquad , x > 0$$

extendida al camino cerrado "W" de la figura 1.9 conocido como "contorno de Bromwich" que puede ser expresada como suma de dos integrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} F(p)\, e^{p\,x}\, dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} F(p)\, e^{p\,x}\, dp$$

donde la curva γ es una semicircunferencia de radio R $\to\infty$ a la izquierda de la recta $\sigma = \sigma_1$. Si F(p) es una función racional irreducible, entonces para x > 0

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} F(p)\, e^{p\,x}\, dp = 0$$

resultado que es una aplicación directa e inmediata del lema de Jordan. Así que para fracciones racionales irreducibles:

$$\pounds^{-1}\,[F(p)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} F(z)\, e^{z\,x}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{W} F(p)\, e^{p\,x}\, dp$$

siempre que x > 0 y $\sigma = \sigma_1$ deje a su izquierda a todas las singularidades de F(p). Esto nos permite calcular la transformada inversa por medio de la integral extendida al contorno cerrado "W" que, en las condiciones dadas, puede evaluarse por medio del cálculo de los residuos alrededor de los polos de $F(p)\, e^{p\,x}$ ya que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{W} F(p)\, e^{p\,x}\, dp = \sum_{\substack{\text{extendida}\\ \text{a}\\ \text{todos}\\ \text{los polos}}} \text{resíduos de } F(p)\, e^{p\,x}$$

y, en consecuencia $\pounds^{-1}\,[F(p)] = \sum_{p_i} \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left((p-p_i)^n\, F(p)\, e^{p\,x}\right|_{p = p_i}\right.$

La sumatoria está extendida a todos los polos p_i de F(p) con órdenes de multiplicidad "n" y hay una contribución a la sumatoria por cada polo.

Aunque desde ámbitos totalmente diferentes, se puede observar la semejanza entre este procedimiento y el desarrollo en fracciones simples visto en el **§ 1.6.1**. En general, ambos métodos son muy semejantes en cuanto a los cálculos complementarios que deben hacerse. El método de descomposición en fracciones simples requiere la búsqueda posterior de cada una de las transformadas de las fracciones simples en la tabla aunque estas se puedan reducir a dos con carácter general mientras que el método de los residuos da directamente la transformada por aplicación de esta última fórmula. Este último método proporciona como contribución a la suma un factor por cada polo sea cual sea su orden de multiplicidad, en tanto que los polos de orden "n" necesitan otras tantas fracciones simples en el desarrollo de F(p). Ambos métodos deben ser considerados complementarios.

Anotemos finalmente que puede haber otros tipos de singularidades que no sean polos de orden "n" finito como son las singularidades "esenciales" o los puntos "de ramificación". En ambos casos pueden establecerse precisiones o modificaciones adicionales en el contorno de Bromwich con el fin de extender los resultados anteriores.

Φ 2 Las funciones "escalón", "impulso δ" y "momento".

§ 2.1 Función escalón.

Se puede definir la función escalón unitario u(x) –función "de Heaviside"–en la forma

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica puede ser representada en la figura 2.1 (a. Esta función u(x) presenta una discontinuidad de primera especie en x = 0 con un salto unidad. La función más general trasladada "a" unidades sobre el eje real positivo a > 0 y con una altura "h" se definirá consecuentemente por

$$h\, u(x-a) = \begin{cases} h & \text{para } x > a \\ 0 & \text{para } x < a \end{cases}$$

con la discontinuidad en x = a – figura 2.1 (b – donde hemos multiplicado al escalón unitario par el valor real "h".

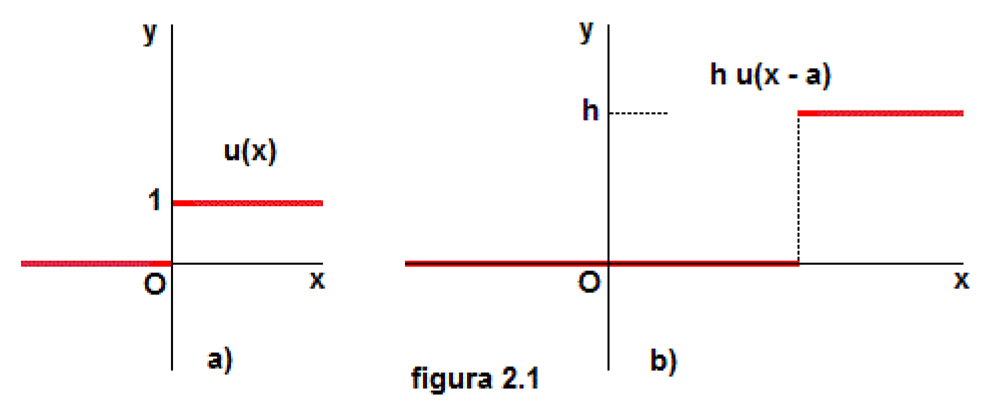


figura 2.1

Esta función será, en principio, enormemente útil para construir y representar matemáticamente funciones segmentariamente continuas que son las funciones en las que estamos interesados porque son las habituales en prácticamente todos los campos de la técnica. Si queremos formalmente construir una función como la representada en la figura 2.2 compuesta por trozos de funciones continuas $f_1(x)$, $f_2(x)$,$f_3(x)$ según la definición:

$\Psi(x) = 0$ para $x < a$,
$\Psi(x) = f_1(x)$ para $a < x < b$, $\Psi(x) = f_2(x)$ para $b < x < c$, $\Psi(x) = f_3(x)$ para $c < x < d$,
$\Psi(x) = 0$ para $d < x$

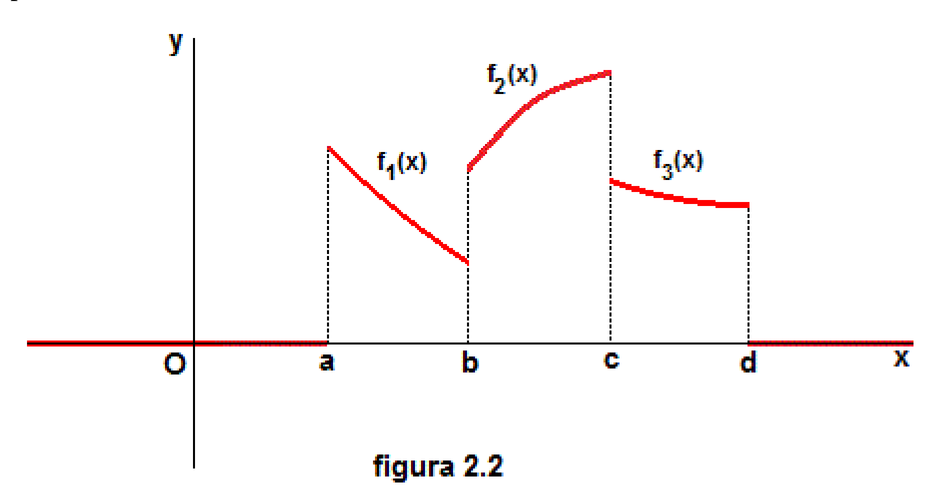


figura 2.2

podemos auxiliarnos de la función escalón definiendo:

$\Psi(x) = f_1(x) [u(x-a) - u(x-b)] + f_2(x) [(u(x-b) - u(x-c)] + f_3(x) [u(x-c) - u(x-d)] =$
$= f_1(x) u(x-a) - f_1(x) u(x-b)) + f_2(x) u(x-b) - f_2(x) u(x-c) + f_3(x) u(x-c) - f_3(x) u(x-d) =$
$= f_1(x) u(x-a) + [f_2(x)- f_1(x)] u(x-b) + [f_3(x)- f_2(x)] u(x-c) - f_3(x) u(x-d).$

estando, en general, este tipo de funciones caracterizado por suma de términos de la forma

$g(x-\alpha) u(x-\beta)$, con $g(x)$ continua en $x > 0$

pudiendo ser cero independientemente tanto α como β.

La función escalón nos permite representar simplemente un "impulso rectangular" de altura "h" y ancho (b–a) en la forma $i(x) = h [u(x-a) - u(x-b)]$. Está situado en la parte positiva del eje centrado en $x = \frac{b+a}{2}$ tal y como se representa en la figura 2.3.

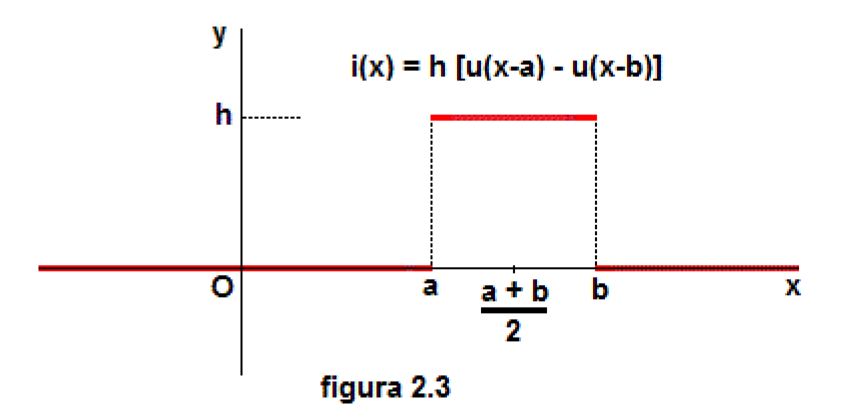


figura 2.3

Otros impulsos con diferentes formas (triangular, senoidal, etc.) pueden ser formalizados de la misma manera. Así podemos, por ejemplo, representar formalmente el tren t(x) de impulsos rectangulares de período "T" y altura unidad de la figura 2.4

$t(x) = u(x-T) - u(x-2T) + u(x-3T) - u(x-4T) + \ldots$

que representa un modelo elemental del conjunto múltiple de funciones periódicas cuya representación funcional presenta gran interés en la física.

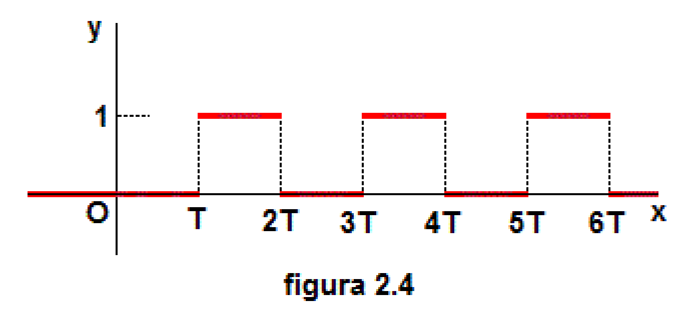


figura 2.4

Desde el punto de vista físico, la función escalón puede ser vista como una aproximación límite de funciones que de forma natural no saltan bruscamente del cero al valor "h" sino que varían de forma continua pero imperceptible a la escala de observación del problema que imponen los demás hechos físicos involucrados. Si la variable "x" es la temporal podríamos decir que el salto se verifica con una duración menor que la constante de tiempo dominante del sistema. Puede servir de ejemplo característico de la función escalón en t = 0, el cierre de un circuito con un generador de corriente continua.

El uso de la función escalón nos permitirá disponer de una representación funcional para leyes de cargas definidas en ciertos sectores de un intervalo mediantes funciones continuas con la forma representada en la figura 2.2.

§ 2.2 Función impulso δ o función "delta" de Dirac.

Definiremos ahora la función

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{para } x \neq 0 \\ \int_{\eta} \delta(x)\,dx = 1 \quad \text{si } 0 \in \eta. \end{cases}$$

que podemos contemplar, si se quiere, como una función simbólica obtenida por paso al límite de una función impulso rectangular centrado en x = 0 al ir estrechando su base y aumentando la altura pero conservando el valor unidad para el área que intercepta con el eje OX. Esta "génesis" gráfica puede visualizarse en la figura 2.5.

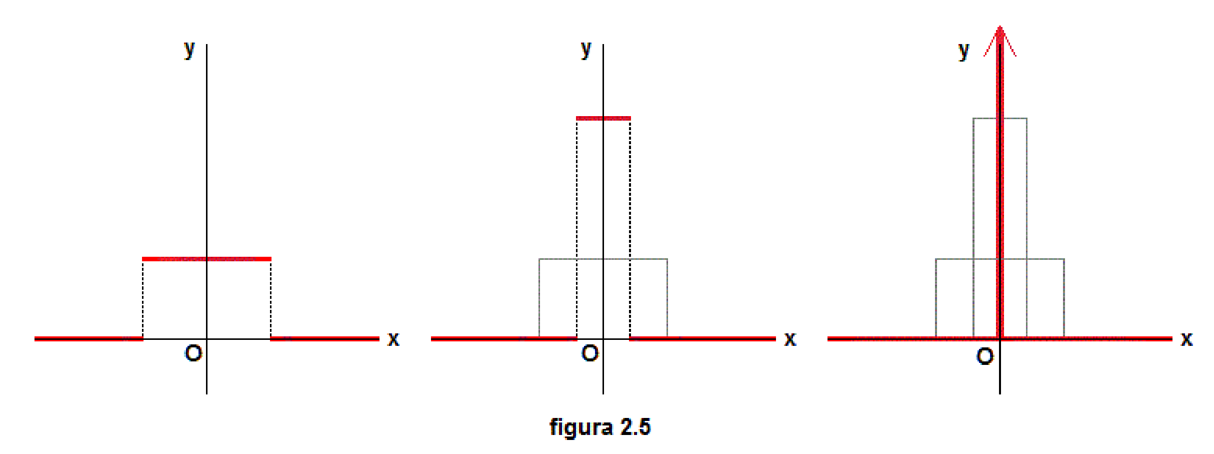


figura 2.5

La función más general trasladada "a" unidades sobre el eje real positivo a > 0 y con una altura "H" se definirá consecuentemente por

$$H\,\delta(x-a) = \begin{cases} 0 \quad \text{para } x \neq 0. \\ \int_{\eta} H\,\delta(x)dx = H \quad \text{si } 0 \in \eta. \end{cases}$$

La forma de esta función simbólica antes de su idealización es indiferente, puede ser consecuencia de un impulso rectangular como en la figura 2.5, de una onda senoidal, de una función de Gauss, etc. pero sobreviene al ir estrechando la base y aumentando la altura conservando el valor del área "H". El empleo de la función "delta" fue sistematizado por el físico inglés Paul Dirac y manifiesta un hecho físico idealizado, enormemente fecundo en el campo de la física y la mecánica. No estamos interesados aquí en extendernos acerca del emplazamiento matemático de tales funciones que amplían el concepto clásico de función y que tienen un contexto propio en el campo puramente matemático.

En el contexto de la flexión de barras que trataremos más adelante, una carga concentrada es, básicamente, la idealización de una carga vertical notable que actúa sobre un espacio muy estrecho reducido, en el límite, a un punto y matemáticamente, el objeto que mejor describe este tipo de función es justamente el impulso de Dirac o función "δ" . Podemos imaginar, por ejemplo una carga uniforme **Q/e**, –altura de un impulso rectangular– actuando sobre un intervalo **(a – e/2, a + e/2)** que vamos reduciendo progresivamente conservando el área que subtiende. Particularmente, en este contexto, lo importante será traducir esta génesis en la discontinuidad que en el esfuerzo cortante proporciona una carga puntual concentrada y su relación con el resto de las funciones de estado.

Entre las muchas propiedades que se pueden describir con la función impulso "δ" así definida destacamos el denominado "teorema de la integral":

"Para a finito, a > 0 y siendo f(x) una función continua en x = a y de valor f(a) se verifica
$\int_0^{\infty} f(x)\,\delta\,(x-a)\,dx = f(a)$"

Su comprobación es sencilla y representa una importante conclusión para el empleo y manejo de esta función. Puesto que el intervalo de definición de la integral de la transformada **£** es el [0,∞), el resultado puede escribirse simplemente f(x) δ(x – a) = f(a) δ(x – a) entendiendo que es en el marco de las integraciones donde este resultado debe de ser manejado y sabiendo que δ(x – a) con a ≥ 0 deberá ser "aplicado" a funciones continuas en x = a. Es dentro de estas condiciones, en un contexto simbólico, en que deben comprenderse resultados tales como:

$\delta(x) = \delta(-x)$; $x\,\delta(x) = 0$; $x\ \delta(x-a) = a\,\delta(x-a)$; $\delta(a\,x) = \frac{1}{a}\,\delta(x)$ …etc.

§ 2.3 Relaciones formales entre las funciones escalón e impulso. Función "momento".

Según lo dicho anteriormente, el valor de la integral

$\int_0^x \delta(x-a)dx$, con a > 0

será nulo para x < a ya que en tal caso el intervalo [0, x] no contendrá a "a" y valdrá la unidad en el caso x > a debido a que "a" quedará dentro del intervalo de integración. El resultado de la integral coincide con el de la función u(x–a), así que podemos escribir:

$u(x-a) = \int_0^x \delta(x-a)dx$

y admitir que $\frac{d}{dx}$ u(x–a) = δ(x– a), donde el operador derivación adquiere un valor puramente formal ya que el límite que implica no puede ser definido sobre una discontinuidad. Obsérvese, además, que la derivada de funciones tales como las de las gráficas 2.6 (a tienen las formas representadas en la figura 2.6 (b. Se trata de aceptar que esta situación se conserva en el límite en el que las funciones se convierten en un salto y un impulso δ respectivamente. En la misma línea podemos aceptar este proceso de derivación formal y considerar la derivada δ′ del impulso de Dirac $\frac{d}{dx}\delta(x-a) = \delta'(x-a)$. Las gráficas (c de la figura 2.6 y su paso al límite ocuparían el mismo papel que las derivadas de las figuras anteriores.

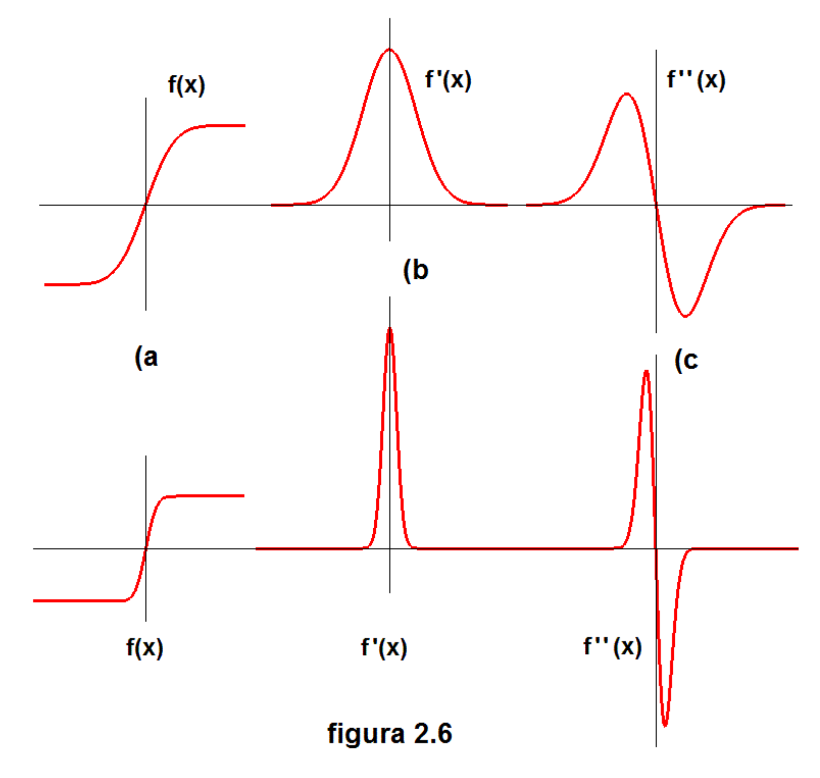


figura 2.6

Si se quiere proceder a la "construcción" formal de la δ′ bastará considerar un impulso rectangular de ancho ε > 0 centrado en x=a . Esta función responderá a la expresión

$u[x-(a-\frac{\varepsilon}{2})] - u[x-(a+\frac{\varepsilon}{2})]$

si conservamos ahora el área encerrada por el bucle rectangular de manera que sea igual a la unidad estrechando la base "ε" esta función deberá tender al impulso δ(x –a). Por lo tanto podremos escribir

$$\delta(x-a) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(u\left[x-\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] - u\left[x-\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]\right),$$

siempre que $\int_{a\in\eta} \left(u\left[x-\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] - u\left[x-\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]\right) = 1$

Considerando derivadas formales a ambos lados de la expresión y conmutando el operador derivada con el de paso al límite podremos escribir

$$\delta'(x-a) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\delta\left[\left(x-\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] - \delta\left[x-\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]\right)\right)$$

esta nueva "función" puede verse generada por la serie de gráficas de la figura 2.7 en la que se representa un doble bucle de "onda" rectangular llevada al límite de dos impulsos δ. Una tal función δ′ (x–a) además de ser nula para todo x ≠ a, verifica $\int_{\eta} \delta'(x-a)\,dx = 0$ para cualquier intervalo "η" del semieje positivo contenga o no a la abscisa x = a. Sin embargo lo que hace realmente interesante a esta función es la particularidad de no ser cero la integral $\int_{\eta} x\,\delta'(x-a)\,dx$ cuyo valor es la unidad con signo negativo cuando a∈η, o sea, la de ser

$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} x\,\delta'(x-a)\,dx = -1$ para cualquier ε > 0.

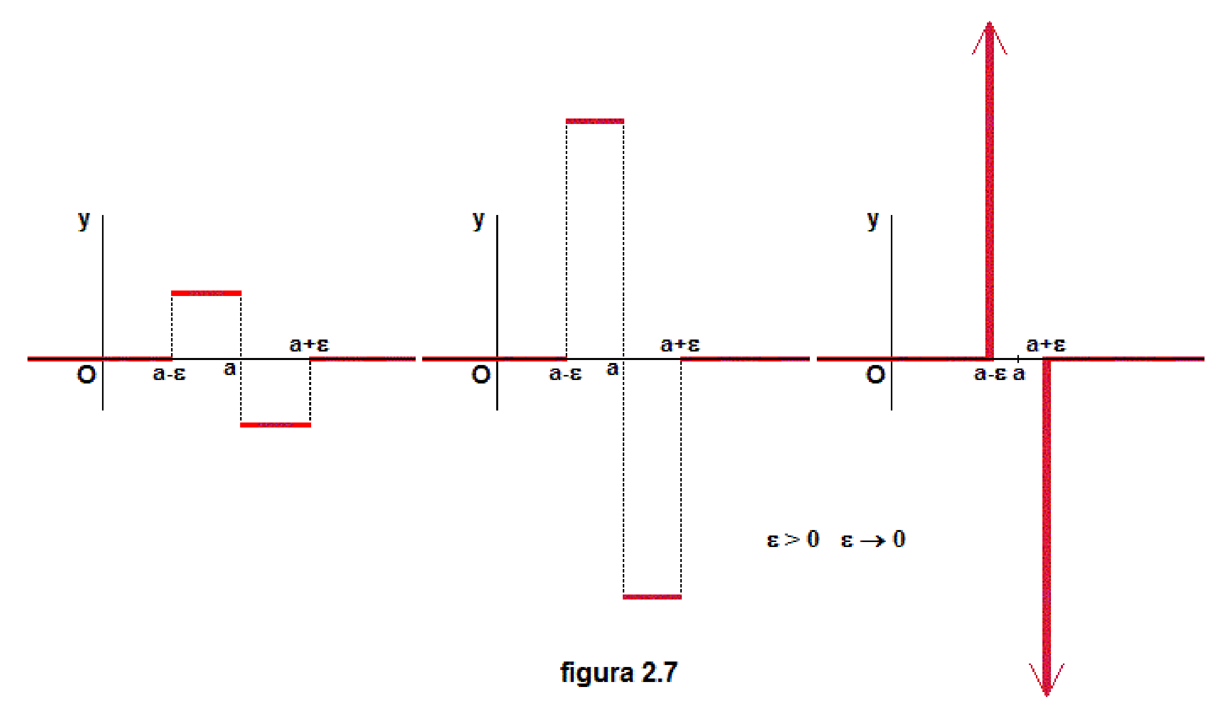


figura 2.7

Para comprobar este resultado y, al mismo tiempo, conocer mejor la metodología operacional asociada a estas funciones trataremos de hallar el $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\,\delta'(x-a)\,dx$ para cualquier ε>0. Efectuando la integración por partes

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\,\delta'(x-a)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(f(x)\,\delta(x-a)\right)\Big|_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} - \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f'(x)\,\delta(x-a)\,dx = -f'(a)$$

con f′(x) continua en x = a y de valor f′(a). El primer factor del segundo miembro se anula. Puede ahora extenderse el intervalo de esta integral contando con el valor nulo de δ′ (x–a) en x ≠ a, así que:

$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\delta'(x-a)\,dx = -f'(a)$, para cualquier ε > 0, y por tanto

$\int_{0}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)\,dx = -f'(a)$, a > 0

Este sería el correspondiente "teorema de la integral" para la función δ′. Ambos "teoremas" pueden generalizarse y contemplarse conjuntamente

$$\int_{\eta} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } a\notin\eta \\ f(a) & \text{si } a\in\eta \text{ , } f(x) \text{ continua en } x = a \end{cases}$$

$$\int_{\eta} f(x)\,\delta'(x-a)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } a\notin\eta \\ -f'(a) & \text{si } a\in\eta \text{ , } f'(x) \text{ continua en } x = a \end{cases}$$

que proporcionan el sentido operacional asignado a ambas funciones en el marco de las integraciones. Es en este mismo marco es en el que se pueden escribir expresiones tales como

$x\,\delta'(x) = -\,\delta(x)$, $\delta'(x) = -\,\delta'(-x)$, …etc.

Particularmente se obtiene el resultado ya citado

$$\int_{\eta} x\,\delta'(x-a)\,dx = -1 \qquad \text{si } a\in\eta$$

y esto es lo que permite considerar a $\delta'(x-a)$ como la "función momento unidad" toda vez que el valor absoluto de su momento de primer orden es el valor de la "altura" M que proporcionemos a la derivada del impulso δ

$$\int_{\eta} M\,x\,\delta'(x-a)\,dx = -M \qquad \text{si } a\in\eta$$

Por lo dicho, esta "función" nos va a proporcionar una tercera forma usual de solicitación sobre los modelos matemáticos de las leyes de cargas en la flexión simple de vigas. Serán los momentos de flexión aislados de magnitud "M".

Φ 3 Transformadas de las funciones segmentariamente continuas y de los impulsos "δ" y momentos "δ′ ".

§ 3.1 Transformadas de la función escalón, impulso e impulso de Dirac.

La transformada del escalón unitario u(x) será

$$\mathcal{L}[u(x)] = \int_0^x e^{-px}\,u(x)\,dx = \int_0^x e^{-px}\,dx = -\frac{1}{p}\,e^{-px}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

y la del escalón de altura "q" será $\mathcal{L}[q\,u(x)] = \frac{q}{p}$

Teniendo en cuenta ahora la traslación en el dominio de la "x" obtenemos

$$\mathcal{L}[q\,u(x-a)] = q\,e^{-pa}\,\frac{1}{p}$$

así que la transformada de un impulso rectangular de altura "h" en (a,b) será

$$\mathcal{L}[\,h\,i(a,b)\,] = \mathcal{L}[\,h\,[u(x-a) - u(x-b)]\,] = \frac{h}{p}\,(e^{-pa} - e^{-pb})$$

y, consecuentemente, para el definido en (0, b)

$$\mathcal{L}[\,h\,i(0,b)\,] = \frac{h}{p}\,(1 - e^{-pb})$$

Para obtener la transformada de δ bastará considerar su "teorema de la integral"

$$\mathcal{L}[\,\delta(x-a)\,] = \int_0^x e^{-px}\,\delta(x-a)\,dx = e^{-pa}$$

por lo que $\mathcal{L}[\delta(x)] = 1$, siendo en general para $Q\in\Re$

$Q\,\delta(x)$………...$\mathcal{L}$…..…….Q ; $Q\,\delta(x-a)$ ………...$\mathcal{L}$…..…….$Q\,e^{-ap}$

A estos mismos resultados puede llegarse desde la posible génesis formal del impulso δ tanto en x = 0 como en x = a considerando el límite un impulso rectangular.

Análogamente para obtener la transformada de $\delta'(x-a)$ basta asimismo utilizar su "teorema de la integral" y obtenemos directamente

$$\mathcal{L}[\delta'(x-a)] = \int_0^x e^{-px}\,\delta'(x-a)\,dx = -(-p\,e^{-px}\Big|_{x=a} = p\,e^{-ap}$$

y, por tanto, $\mathcal{L}[\delta'(x)] = p$. Los resultados generales pueden ser añadidos en la forma

$M\,\delta'(x)$ ………...$\mathcal{L}$…..…….$M\,p$; $M\,\delta'(x-a)$………...$\mathcal{L}$…..…….$M\,p\,e^{-ap}$

§ 3.2 Transformada de f(x –a) u(x–a) y de f(x) u(x– a).

Siendo £ [f (x)] = F(p), en el apartado **§ 1.3.2** obtuvimos el resultado

£ [f (x – a)] = e^{-pa} F(p) , $a \geq 0$, siendo f(x – a) = 0 para x < a

Es ahora cuando podemos formalizar este mismo resultado estableciendo

£ [f (x – a) u(x– a)] = e^{-ap} F(p)

resultado al que también puede llegarse aplicando la definición y realizando un adecuado cambio de variable. Cuando a = 0 proporciona el resultado trivial: £ [f (x) u(x)] = F(p).

En los cálculos ordinarios, si f(x) es transformable podremos prescindir normalmente de la función u(x), es así como las anteriores transformadas obtenidas para las funciones f(x) son válidas para las expresiones f(x) u(x). No obstante, el manejo de la función escalón no siempre resulta formal. Es el caso de la obtención de transformadas de funciones tales como f(x) u(x – a). Para este tipo de transformadas siempre puede acudirse a la definición y utilizar reiteradamente la integración por partes pero es mucho más directo utilizar

£ [f (x) u(x– a)] = e^{-ap} £ [f (x + a) u(x)]

que es otra manera de considerar el resultado £ [f (x – a) u(x– a)] = e^{-ap} £ [f (x) u(x)].

Las transformadas:

f (x – a) u(x– a) ……………………………£…………………………… e^{-ap} £ [f (x)].
f (x) u(x– a) ……………………………£…………………………… e^{-ap} £ [f (x + a)]

son fundamentales para manejar las funciones sectorialmente continuas que se utilizan habitualmente en la técnica. Unos sencillos cálculos puede ilustrar las diferentes posibilidades de transformación. Sabiendo, por ejemplo, que

£ [x^2] = $\frac{2}{p^3}$, £ [x] = $\frac{1}{p^2}$ y £ [c] = $\frac{c}{p}$

siendo "c" un valor real conocemos inmediatamente las transformadas:

£ [$(x–a)^2$ u(x –a) = $\frac{2}{p^3} e^{-ap}$, £ [(x– a) u(x– a)] = $\frac{1}{p^2} e^{-ap}$ y £ [c u(x–a)] = $\frac{c}{p} e^{-ap}$

Para hallar, sin embargo la transformada de x^2 u(x–a) podemos utilizar la fórmula correspondiente para obtener

£ [x^2 u(x –a)] = e^{-ap} £ [$(x + a)^2$] = e^{-ap} £ [$x^2 + 2\,a\,x + a^2$] = $e^{-ap} \left(\frac{2}{p^3} + \frac{2\,a}{p^2} + \frac{a^2}{p} \right)$

o bien podemos descomponer x^2 en la forma

$x^2 = (x–a)^2 + 2\,a\,(x– a) + a^2$

y de aquí

£[x^2 u(x –a)] = £[$(x–a)^2$ u(x –a) + 2 a (x–a) u(x-a) + a^2 u(x–a)] = $\frac{2}{p^3} e^{-ap} + \frac{2\,a}{p^2} e^{-ap} + \frac{a^2}{p} e^{-ap}$

§ 3.3 Transformadas de las funciones periódicas generadas con una función g(x) en el primer período.

Las transformaciones vistas anteriormente nos permiten plantearnos de forma sencilla la transformada de las funciones periódicas f(x) de período "T" definidas en el semieje positivo –figura 3.1–. Si es g(x) una función que posee transformada definida en [0, T], la función periódica f(x) generada con esta función será

f(x) = g(x) u(x) + g(x–T) u(x–T)+g(x–2 T) u(x–2 T) +…

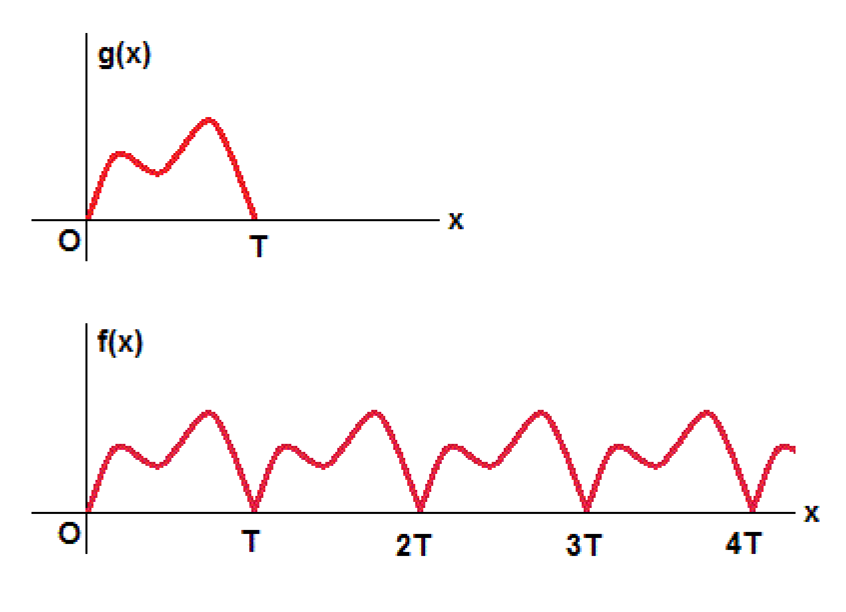


figura 3.1

Podemos prescindir del escalón u(x). Siendo G(p) la transformada de g(x)

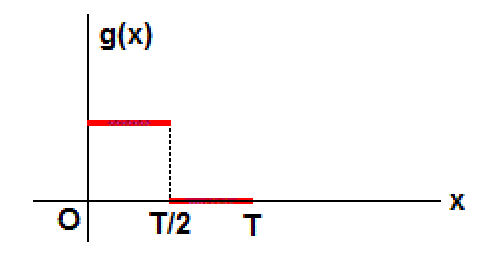
$F(p) = G(p) + G(p)\, e^{-Tp} + G(p)\, e^{-2Tp} + G(p)\, e^{-3Tp} + \ldots = G(p)\,(1 + e^{-Tp} + e^{-2Tp} + e^{-3Tp} + \ldots)$

y teniendo en cuenta la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada

$F(p) = G(p)\,\frac{1}{1-e^{-Tp}}$

Si se considera el tren de impulsos rectangulares de la figura 3.2 con

$g(x) = u(x) - u\left(x - \frac{T}{2}\right)$ y su transformada $G(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-\left(\frac{T}{2}\right)p}}{p}$



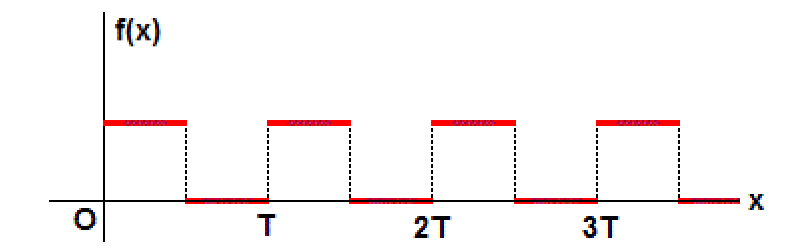


figura 3.2

su transformada será $F(p) = \frac{1 - e^{-\left(\frac{T}{2}\right)p}}{p\,(1 - e^{-Tp})} = \frac{1}{p\,(1 + e^{-\left(\frac{T}{2}\right)p})}$

Si el tren de impulsos es, finalmente, el de la figura 3.3

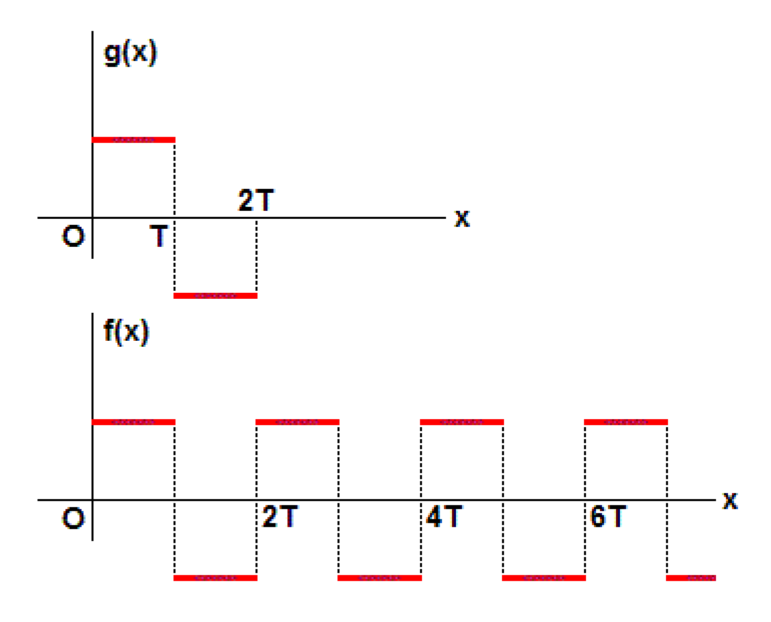


figura 3.3

con $g(x) = u(x) - 2\,u(x - T) + u(x - 2\,T)$, siendo $G(p) = \frac{1}{p} - 2\,\frac{e^{-T p}}{p} + \frac{e^{-2 T p}}{p}$, la transformada de la onda rectangular no rectificada con período "2 T" será

$$F(p) = \frac{1}{p}\,\frac{1 - e^{-T p}}{1 + e^{-T p}} = \frac{1}{p}\,\frac{e^{\left(\frac{T}{2}\right)p} - e^{-\left(\frac{T}{2}\right)p}}{e^{\left(\frac{T}{2}\right)p} + e^{-\left(\frac{T}{2}\right)p}} = \frac{1}{p}\ \mathrm{th}\left(\frac{T\,p}{2}\right)$$

Φ 4 Aplicaciones de la transformada.

Algunas de las aplicaciones tradicionales de la transformada **£** han sido hoy totalmente superadas por la generalización del uso de ordenadores. La existencia de diferentes programas de cálculo numérico y simbólico han dejado fuera de utilidad una gran cantidad de métodos de cálculo incluidos el de las transformadas que aquí se han descrito o, por ejemplo, la aplicación de la transformada al cálculo de integrales. Resulta sin embargo interesante aprovechar su metodología para resolver problemas particulares que requieran un tratamiento sistemático en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales o su ampliación, en algunos casos, a las ecuaciones en derivadas parciales y, por extensión, a los sistemas de ecuaciones diferenciales o integro-diferenciales simultáneas muy usuales en mecánica, circuitos eléctricos con elementos lineales, problemas electromecánicos o sistemas en analogía con los anteriores en cinemática, química etc.

§ 4.1 Integración de la ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes reales.

Como se dijo al principio, la transformada de Laplace resulta un potente método de simplificación de los cálculos para obtener soluciones particulares de ecuaciones lineales con condiciones iniciales. Aunque para algunos tipos de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables puede aún resultar ventajoso el uso de los métodos de transformación, según el tipo de coeficientes, la transformada de Laplace es un método de integración simple y eficaz en el caso de las ecuaciones con coeficientes constantes que es el que aquí nos interesa. Podemos describir brevemente el procedimiento sobre una ecuación general

$$c_n\, y^{(n}(x) + c_{n-1}\, y^{(n-1}(x) + \ldots\ldots + c_1\, y'(x) + c_0\, y(x) = f(x)$$

Teniendo en cuenta las transformadas de las derivadas y el carácter lineal de **£** se llega a

$$£\,[f(x)] = (c_n\, p^n + c_{n-1}\, p^{n-1} + \ldots\ldots + c_1\, p + c_0)\ £\,[y(x)] - (c_n\, p^{n-1} + \ldots\ldots + c_2\, p + c_1)\, y(0) -$$
$$- (c_n\, p^{n-2} + \ldots\ldots + c_3\, p + c_2)\, y'(0) - \ldots\ldots c_n\, y^{(n-1}(0)$$

si se conocen las condiciones iniciales $y(0)$, $y'(0)$,……$y^{(n-1}(0)$ y siendo £ [f(x)] =F(p), obtendremos con simples operaciones aritméticas una función racional, en general irreducible

$$£\,[y] = \frac{\psi(p)}{c_n\, p^n + c_{n-1}\, p^{n-1} + \cdots\ldots + c_1\, p + c_0}$$

y de aquí mediante la transformada inversa

$$y = £^{-1}\left[\frac{\psi(p)}{c_n\, p^n + c_{n-1}\, p^{n-1} + \cdots\ldots + c_1\, p + c_0}\right]$$

Describiremos un sencillo ejemplo ilustrativo como es el de hallar la solución y(x) de la ecuación diferencial:

$y'' - 3\,a^2\,y = \frac{1}{2}\,x^2 \cos ax$ que satisfaga $y(0) = y'(0) = 0$

El procedimiento clásico pasaría por hallar la solución general de la ecuación y ensayar una solución particular sugerida por la forma del segundo miembro –método de los coeficientes indeterminados– o bien por el método general de variación de las constantes en el que tendríamos que calcular integrales del tipo $\int x^2\, e^{\sqrt{3}\,ax} \cos ax\, dx$ y $\int x^2\, e^{-\sqrt{3}\,ax} \cos ax\, dx$. Utilizando los métodos de transformación, aplicaremos la transformada a la ecuación

$$£\,[y'' - 3\,a^2\,y\,] = £\,[y''] - 3\,a^2\,£\,[y] = p^2\,£\,[y] - p\,y(0) - y'(0) - 3\,a^2\,£\,[y] = £\,[\tfrac{1}{2}\,x^2 \cos ax]$$

Para hallar la transformada del segundo miembro bastará considerar la transformada de "cos ax" y la transformada del producto por x^2, obteniendo

$(p^2 - 3\,a^2)\,£\,[y] = \frac{p\,(p^2 - 3\,a^2)}{(p^2+a^2)^3}$, así que $£\,[y] = \frac{p}{(p^2+a^2)^3} = \frac{1}{4\,a^2}\frac{p}{(p^2+a^2)^2} - \frac{1}{4\,a^2}\frac{p^3 - 3\,a^2\,p}{(p^2+a^2)^3}$

y por lo tanto, la solución particular buscada será

$$y(x) = \frac{1}{8\,a^3}\,x \operatorname{sen} ax - \frac{1}{8\,a^2}\,x^2 \cos ax$$

En la aplicación de estos métodos al análisis de vigas de rigidez constante con diferentes condiciones de sustentación en los extremos, resolveremos la ecuación $y^{IV} = f(x)$ para leyes de cargas muy generales y este no es un problema de condiciones iniciales sino de condiciones en los extremos o "de contorno" por lo que tendremos que habilitar un sistema para adaptar el método al problema particular sin perder las notorias ventajas del procedimiento.

Φ 5 Análisis de vigas de rigidez constante.

Consideramos una barra de directriz recta y sección uniforme cargada verticalmente y admitimos las hipótesis de existencia de fibras neutras y la conservación de las secciones planas. El análisis de la deformación se puede reducir a los desplazamientos verticales que determinan la curva deformada "elástica" y a los giros de las secciones que pueden deducirse de esta curva por simple derivación. Se considera aquí que las precisiones complementarias y las condiciones que permiten reducir este problema a uno unidimensional son ya suficientemente conocidas y nos centraremos en el procedimiento para la obtención bajo esas determinadas condiciones de hallar las funciones de estado del proceso de flexión utilizando los métodos de trasformación.

La curva elástica y(x) que define los desplazamientos verticales viene regida por la ecuación:

$$y''(x) = \frac{M(x)}{B}\,(1+y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}$$

que muestra simplemente la relación proporcional directa de la curvatura de la curva deformada k(x) con el momento flector M(x) siendo constante a lo largo de toda la pieza el coeficiente de rigidez de la viga a flexión B = E I. Esta ecuación sigue siendo válida cuando la rigidez B es variable. La exigencia de considerar pequeños descensos condicionada al comportamiento elástico hacen adecuada la ecuación lineal aproximada que resulta de suponer que $y'(x)^2 \approx 0$. En nuestro caso, con B = cte podemos evitar el conocimiento de M(x) derivando dos veces y obteniendo la ecuación

$y^{IV}(x) = \frac{w(x)}{B}$

siendo w(x) la "ley de cargas" verticales, función definida en [0, L] con origen de abscisas en el extremo izquierdo de la barra de longitud "L".

Si w(x) tiene transformada de Laplace W(p), aplicando la transformada a la ecuación anterior obtendremos

$£\,[y^{IV}(x)] = p^4\, £\,[y(x)] - p^3\, y(0) - p^2\, y'(0) - p\, y''(0) - y'''(0) = \frac{W(p)}{B}$

y de aquí

$£\,[y(x)] = \frac{1}{B}\frac{W(p)}{p^4} + \frac{y(0)}{p} + \frac{y'(0)}{p^2} + \frac{y''(0)}{p^3} + \frac{y'''(0)}{p^4}$

Denominando a $£^{-1}\,[\frac{W(p)}{p^4}] = z(x)$, las transformadas inversas proporcionarán

$$y(x) = \frac{1}{B}\, z(x) + y(0)\, u(x) + y'(0)\, x + \frac{y''(0)}{2}\, x^2 + \frac{y'''(0)}{6}\, x^3 \qquad (2)$$

Prescindiendo de la función u(x) ya que a lo largo de toda la longitud "L" de la viga vale 1, las sucesivas derivadas de la expresión anterior serán:

$y'(x) = \frac{1}{B}\, z'(x) + y'(0) + y''(0)\, x + \frac{y'''(0)}{2}\, x^2$

$y''(x) = \frac{1}{B}\, z''(x) + y''(0) + y'''(0)\, x$

$y'''(x) = \frac{1}{B}\, z'''(x) + y'''(0)$

$y^{IV}(x) = \frac{1}{B}\, z^{IV}(x)$

Junto a los desplazamientos y(x), las ecuaciones anteriores nos definen respectivamente el resto de las funciones de estado de la flexión simple que son:

- Los giros de las secciones en el proceso de flexión $\theta(x) = \text{arc tg } y'(x) \approx y'(x)$
- El momento flector $M(x) = B\, y''(x)$
- El esfuerzo de corte o "cortante" $T(x) = B\, y'''(x)$

§ 5.1 Las funciones de deformación y esfuerzo en los seis casos estándar.

Para sistematizar ahora el método requerimos de las condiciones de sustentación de la viga en sus extremos que, en principio, son las reflejadas en el siguiente cuadro 2

SUSTENTACIÓN	extremo izquierdo		extremo derecho	
	y(0) = 0	**y′(0) = 0**	**y″(L) = 0**	**y‴(L) = 0**
	y″(0) = 0	**y‴(0) = 0**	**y(L) = 0**	**y′(L) = 0**
	y(0) = 0	**y″(0) = 0**	**y(L) = 0**	**y″(L) = 0**
	y(0) = 0	**y′(0) = 0**	**y(L) = 0**	**y″(L) = 0**
	y(0) = 0	**y″(0) = 0**	**y(L) = 0**	**y′(L) = 0**
	y(0) = 0	**y′(0) = 0**	**y(L) = 0**	**y′(L) = 0**

CUADRO 2

donde se han considerado las combinaciones mecánicamente viables de las tres condiciones tipo: "empotramientos perfectos" a los que nos referiremos simplemente como "empotramientos", "apoyos rígidos" o simplemente "apoyos" y "extremos libres". El primero queda caracterizado por descensos y giros nulos en el vínculo, el segundo por la anulación de descensos y flectores y el tercero por la anulación de flectores y cortantes.

Impongamos estas condiciones de vínculo en cada uno de los casos sobre las funciones de estado generales representadas anteriormente.

§ 5.1.1 Viga empotrada–libre.

La ménsula empotrada en su extremo izquierdo está solicitada por una ley de cargas w(x) representada respecto del origen en el extremo izquierdo empotrado. Considerando las condiciones del cuadro anterior se obtendrá para y(x) y sus derivadas segunda y tercera

$y(x) = \frac{1}{B} z(x) + \frac{y''(0)}{2} x^2 + \frac{y'''(0)}{6} x^3$
$y''(x) = \frac{1}{B} z''(x) + y''(0) + y'''(0)\, x$
$y'''(x) = \frac{1}{B} z'''(x) + y'''(0)$

que deberán satisfacer las condiciones del cuadro para x = L

$y''(L) = \frac{1}{B} z''(L) + y''(0) + y'''(0)\, L = 0$
$y'''(L) = \frac{1}{B} z'''(L) + y'''(0) = 0$

y de aquí pueden obtenerse los valores $y''(0)$ e $y'''(0)$

$y'''(0) = -\frac{1}{B} z'''(L)$
$y''(0) = \frac{1}{B} (L\, z'''(L) - z''(L))$

Así que la ecuación de la curva elástica y la de sus derivadas sucesivas serán en este caso

$B\, y(x) = z(x) + \frac{L\, z'''(L) - z''(L)}{2} x^2 - \frac{z'''(L)}{6} x^3$
$B\, y'(x) = z'(x) + [L\, z'''(L) - z''(L)]\, x - \frac{z'''(L)}{2} x^2$
$M(x) = B\, y''(x) = z''(x) + L\, z'''(L) - z''(L) - z'''(L)\, x$
$T(x) = B\, y'''(x) = z'''(x) - z'''(L)$

§ 5.1.2 Viga libre–empotrada.

La deformada de la ménsula en el extremo derecho solicitada por una ley de cargas w(x) y su primera derivada serán en este caso

$y(x) = \frac{1}{B} z(x) + y(0) + y'(0)\, x$
$y'(x) = \frac{1}{B} z'(x) + y'(0)$

Del sistema: $y(L) = \frac{1}{B} z(L) + y(0) + y'(0)\, L = 0$, $y'(L)= \frac{1}{B} z'(L)+ y'(0) = 0$, obtenemos

$y'(0)= -\frac{1}{B} z'(L)$, $y(0) = \frac{1}{B} [- z(L) + L\, z'(L)]$

por lo que la elástica y sus derivadas sucesivas vendrán expresadas por

$B\, y(x) = z(x) + L\, z'(L) - z(L) - z'(L)\, x$
$B\, y'(x) = z'(x) - z'(L)$
$M(x) = B\, y''(x) = z''(x)$
$T(x) = B\, y'''(x) = z'''(x)$

§ 5.1.3 Viga apoyada–apoyada.

Para una ley de cargas con origen en su extremo izquierdo w(x) obtendremos para y(x)

$y(x) = \frac{1}{B} z(x) + y'(0)\, x + \frac{y'''(0)}{6} x^3$

Del sistema: $\frac{1}{B} z(L) + y'(0)\, L + \frac{y'''(0)}{6} L^3 = 0$, $\frac{1}{B} z''(L) + y'''(0)\, L= 0$, obtenemos

$y'''(0) = -\frac{1}{B} \frac{z''(L)}{L}$, $y'(0) = \frac{1}{B} [\frac{L\, z''(L)}{6} - \frac{z\,(L)}{L}]$

y la elástica y sus derivadas serán en este caso

$B\ y(x) = z(x) + [\frac{L\ z''(L)}{6} - \frac{z\ (L)}{L}]\ x - \frac{z''(L)}{6\ L}\ x^3$

$B\ y'(x) = z'(x) + \frac{L\ z''(L)}{6} - \frac{z\ (L)}{L} - \frac{z''(L)}{2\ L}\ x^2$

$M(x) = B\ y''(x) = z''(x) - \frac{z''(L)}{L}\ x$

$T(x) = B\ y'''(x) = z'''(x) - \frac{z''(L)}{L}$

§ 5.1.4 Viga empotrada–apoyada.

Se obtiene en este caso

$y(x) = \frac{1}{B}\ z(x) + \frac{y''(0)}{2}\ x^2 + \frac{y'''(0)}{6}\ x^3$

y del sistema: $\frac{1}{B}\ z(L) + \frac{y''(0)}{2}\ L^2 + \frac{y'''(0)}{6}\ L^3 = 0$, $\frac{1}{B}\ z''(L) + y''(0) + y'''(0)\ L = 0$, obtenemos

$y''(0) = \frac{1}{B}\ (\frac{z''(L)}{2} - \frac{3\ z\ (L)}{L^2})$, $y'''(0) = \frac{1}{B}\ (\frac{3\ z(L)}{L^3} - \frac{3\ z''(L)}{2\ L})$

y con estos valores, la deformada y sus derivadas serán

$B\ y(x) = z(x) + (\frac{z''(L)}{4} - \frac{3\ z\ (L)}{2\ L^2})\ x^2 + (\frac{z(L)}{2\ L^3} - \frac{z''(L)}{4\ L})\ x^3$

$B\ y'(x) = z'(x) + (\frac{z''(L)}{2} - \frac{3\ z\ (L)}{L^2})\ x + (\frac{3\ z(L)}{2\ L^3} - \frac{3\ z''(L)}{4\ L})\ x^2$

$M(x) = B\ y''(x) = z''(x) + \frac{z''(L)}{2} - \frac{3\ z\ (L)}{L^2} + (\frac{3\ z(L)}{L^3} - \frac{3\ z''(L)}{2\ L})\ x$

$T(x) = B\ y'''(x) = z'''(x) + \frac{3\ z(L)}{L^3} - \frac{3\ z''(L)}{2\ L}$

§ 5.1.5 Viga apoyada-empotrada.

La curva elástica debe ser ahora

$y(x) = \frac{1}{B}\ z(x) + y'(0)\ x + \frac{y'''(0)}{6}\ x^3$

y del sistema: $\frac{1}{B}\ z(L) + y'(0)\ L + \frac{y'''(0)}{6}\ L^3 = 0$, $\frac{1}{B}\ z'(L) + y'(0) + \frac{y'''(0)}{2}\ L^2 = 0$, obtenemos

$y'(0) = \frac{1}{B}\ (\frac{z'(L)}{2} - \frac{3\ z\ (L)}{2\ L})$, $y'''(0) = \frac{1}{B}\ (\frac{3\ z(L)}{L^3} - \frac{3\ z'(L)}{L^2})$

y con estos valores las funciones de estado quedarán definidas por

$B\ y(x) = z(x) + (\frac{z'(L)}{2} - \frac{3\ z\ (L)}{2\ L})\ x + (\frac{z(L)}{2\ L^3} - \frac{z'(L)}{2\ L^2})\ x^3$

$B\ y'(x) = z'(x) + \frac{z'(L)}{2} - \frac{3\ z\ (L)}{2\ L} + (\frac{3\ z(L)}{2\ L^3} - \frac{3\ z'(L)}{2\ L^2})\ x^2$

$M(x) = B\ y''(x) = z''(x) + (\frac{3\ z(L)}{L^3} - \frac{3\ z'(L)}{L^2})\ x$

$T(x) = B\ y'''(x) = z'''(x) + \frac{3\ z(L)}{L^3} - \frac{3\ z'(L)}{L^2}$

§ 5.1.6 Viga empotrada-empotrada.

En este caso la curva elástica debe ser

$y(x) = \frac{1}{B}\ z(x) + \frac{y''(0)}{2}\ x^2 + \frac{y'''(0)}{6}\ x^3$

Las ecuaciones para hallar y "(0) e y '''(0) serán

$\frac{1}{B}\ z(L) + \frac{y''(0)}{2}\ L^2 + \frac{y'''(0)}{6}\ L^3 = 0$, $\frac{1}{B}\ z'(L) + y''(0)\ L + \frac{y'''(0)}{2}\ L^2 = 0$, obteniendo

$y''(0) = \frac{1}{B}\ (\frac{2\ z'(L)}{L} - \frac{6\ z\ (L)}{L^2})$, $y'''(0) = \frac{1}{B}\ (\frac{12\ z(L)}{L^3} - \frac{6\ z'(L)}{L^2})$

y con estos valores podemos escribir

$B\,y(x) = z(x) + \left(\frac{z'(L)}{L} - \frac{3\,z(L)}{L^2}\right) x^2 + \left(\frac{2\,z(L)}{L^3} - \frac{z'(L)}{L^2}\right) x^3$

$B\,y'(x) = z'(x) + \left(\frac{2\,z'(L)}{L} - \frac{6\,z(L)}{L^2}\right) x + \left(\frac{6\,z(L)}{L^3} - \frac{3\,z'(L)}{L^2}\right) x^2$

$M(x) = B\,y''(x) = z''(x) + \frac{2\,z'(L)}{L} - \frac{6\,z(L)}{L^2} + \left(\frac{12\,z(L)}{L^3} - \frac{6\,z'(L)}{L^2}\right) x$

$T(x) = B\,y'''(x) = z'''(x) + \frac{12\,z(L)}{L^3} - \frac{6\,z'(L)}{L^2}$

Estos resultados nos permiten reducir el estudio de cada uno de los casos a la obtención de la función z(x) y a sus tres primeras derivadas y las correspondientes particularizaciones de dos de ellas para x = L = longitud de la viga.

El cuadro 3 resume las funciones de deformación y esfuerzo para cada uno de los casos considerados.

§ 5.2 La función z(x) y sus derivadas.

Siendo w(x) la ley de cargas, es W(p) = **£** [w(x)] y $z(x) = \mathbf{£}^{-1}\left[\frac{W(p)}{p^4}\right]$

En los modelos que habitualmente contemplamos las leyes de cargas están compuestas por sumas de tres tipos de acciones en el intervalo [0, L]:

- Una función segmentariamente continua en [0, L] con un número finito de saltos finitos.
- Un número finito de cargas Q concentradas.
- Un número finito de momentos M de flexión aislados.

cada una de ellas aporta diferentes contribuciones a la función z(x) y a sus derivadas.

La primera solicitación proporciona a la ley de cargas, en general, suma de términos de la forma f(x) u(x – a) o bien f(x –a) u(x – a) con f(x) una función continua siendo la función escalón la encargada de formalizar las discontinuidades. Las transformadas de tales funciones se han descrito en el **§ 3.2**. Básicamente habremos de considerar las transformadas inversas de la función $\frac{W(p)}{p^4}$ tal y como se ha descrito en el **Φ 5**. Debido a la utilización habitual de sectores solicitados por factores de tipo polinómico –tanto si son el resultado de aproximaciones de otras funciones más complejas como si son acciones directas de segmentos de cargas continuas de envolvente lineal, parabólica o cúbica– puede ser muy útil disponer del cuadro 4 dónde se reflejan algunos de los términos usuales de w(x) que contribuyen directamente a la función z(x). En dicho cuadro se ha añadido formalmente la función u(x) aunque en la mayor parte de casos prácticos prescindiremos de su inclusión –por ser de valor unidad a lo largo del intervalo físico en el que trabajamos– dejando solamente como representativo el factor que la multiplica.

Estas aportaciones directas a la función z(x) se puede completar, cuando sea conveniente, con algunas sencillas operaciones aritméticas para su más fácil aprovechamiento. Por ejemplo cuando tengamos una expresión como la q (x –b) u(x – a) podemos transformarla previamente de la siguiente manera:

q (x –b) u(x – a) = q x u(x – a) – q b u (x –a) = q (x – a) u(x – a) + q (a – b) u(x – a)

La segunda solicitación proporciona términos en general de la forma Q δ(x –a) y la tercera términos M δ′(x –a) por lo que los cálculos propios de la transformación se reducen y simplifican mucho. A este respecto es interesante destacar las contribuciones a la función z(x) y sus derivadas de tres solicitaciones tipo que se representan en el cuadro 5. Como ya hemos visto la derivación de una función escalón genera un impulso. Esto se puede poner de manifiesto cuando la viga está solicitada por un momento aislado y en ese caso la derivada tercera de z(x) lo contiene adquiriendo solamente un sentido formal para posibilitar el que se verifique la igualdad $z^{IV}(x) = w(x)$, no aportando ninguna información relevante a los esfuerzos de corte. En el cuadro 5 se ha conservado este formalismo pero en los casos prácticos, puede prescindirse de su aportación a la función z'''(x).

Viga empotrada - libre

$$B\,y(x) = z(x) + \frac{L\,z'''(L) - z''(L)}{2}\,x^2 - \frac{z'''(L)}{6}\,x^3$$
$$B\,y'(x) = z'(x) + [L\,z'''(L) - z''(L)]\,x - \frac{z'''(L)}{2}\,x^2$$
$$M(x) = B\,y''(x) = z''(x) + L\,z'''(L) - z''(L) - z'''(L)\,x$$
$$T(x) = B\,y'''(x) = z'''(x) - z'''(L)$$

Viga libre - empotrada

$$B\,y(x) = z(x) + \left[\frac{L\,z''(L)}{6} - \frac{z(L)}{L}\right] x - \frac{z''(L)}{6\,L}\,x^3$$
$$B\,y'(x) = z'(x) + \frac{L\,z''(L)}{6} - \frac{z(L)}{L} - \frac{z''(L)}{2\,L}\,x^2$$
$$M(x) = B\,y''(x) = z''(x) - \frac{z''(L)}{L}\,x$$
$$T(x) = B\,y'''(x) = z'''(x) - \frac{z''(L)}{L}$$

Viga apoyada - apoyada

$$B\,y(x) = z(x) + \left[\frac{L\,z''(L)}{6} - \frac{z(L)}{L}\right] x - \frac{z''(L)}{6\,L}\,x^3$$
$$B\,y'(x) = z'(x) + \frac{L\,z''(L)}{6} - \frac{z(L)}{L} - \frac{z''(L)}{2\,L}\,x^2$$
$$M(x) = B\,y''(x) = z''(x) - \frac{z''(L)}{L}\,x$$
$$T(x) = B\,y'''(x) = z'''(x) - \frac{z''(L)}{L}$$

Viga empotrada - apoyada

$$B\,y(x) = z(x) + \left(\frac{z''(L)}{4} - \frac{3\,z(L)}{2\,L^2}\right) x^2 + \left(\frac{z(L)}{2\,L^3} - \frac{z''(L)}{4\,L}\right) x^3$$
$$B\,y'(x) = z'(x) + \left(\frac{z''(L)}{2} - \frac{3\,z(L)}{L^2}\right) x + \left(\frac{3\,z(L)}{2\,L^3} - \frac{3\,z''(L)}{4\,L}\right) x^2$$
$$M(x) = B\,y''(x) = z''(x) + \frac{z''(L)}{2} - \frac{3\,z(L)}{L^2} + \left(\frac{3\,z(L)}{L^3} - \frac{3\,z''(L)}{2\,L}\right) x$$
$$T(x) = B\,y'''(x) = z'''(x) + \frac{3\,z(L)}{L^3} - \frac{3\,z''(L)}{2\,L}$$

Viga apoyada - empotrada

$$B\,y(x) = z(x) + \left(\frac{z'(L)}{2} - \frac{3\,z(L)}{2\,L}\right) x + \left(\frac{z(L)}{2\,L^3} - \frac{z'(L)}{2\,L^2}\right) x^3$$
$$B\,y'(x) = z'(x) + \frac{z'(L)}{2} - \frac{3\,z(L)}{2\,L} + \left(\frac{3\,z(L)}{2\,L^3} - \frac{3\,z'(L)}{2\,L^2}\right) x^2$$
$$M(x) = B\,y''(x) = z''(x) + \left(\frac{3\,z(L)}{L^3} - \frac{3\,z'(L)}{L^2}\right) x$$
$$T(x) = B\,y'''(x) = z'''(x) + \frac{3\,z(L)}{L^3} - \frac{3\,z'(L)}{L^2}$$

Viga empotrada - empotrada

$$B\,y(x) = z(x) + \left(\frac{z'(L)}{L} - \frac{3\,z(L)}{L^2}\right) x^2 + \left(\frac{2\,z(L)}{L^3} - \frac{z'(L)}{L^2}\right) x^3$$
$$B\,y'(x) = z'(x) + \left(\frac{2\,z'(L)}{L} - \frac{6\,z(L)}{L^2}\right) x + \left(\frac{6\,z(L)}{L^3} - \frac{3\,z'(L)}{L^2}\right) x^2$$
$$M(x) = B\,y''(x) = z''(x) + \frac{2\,z'(L)}{L} - \frac{6\,z(L)}{L^2} + \left(\frac{12\,z(L)}{L^3} - \frac{6\,z'(L)}{L^2}\right) x$$
$$T(x) = B\,y'''(x) = z'''(x) + \frac{12\,z(L)}{L^3} - \frac{6\,z'(L)}{L^2}$$

CUADRO 3

Solicitaciones	$W(p)/p^4$	$z(x)$
$q\,u(x)$	$\frac{q}{p^5}$	$\frac{q}{4!}x^4\,u(x)$
$q\,x\,u(x)$	$\frac{q}{p^6}$	$\frac{q}{5!}x^5\,u(x)$
$q\,x^2\,u(x)$	$\frac{2\,q}{p^7}$	$\frac{2\,q}{6!}x^6\,u(x)$
$q\,x^3\,u(x)$	$\frac{6\,q}{p^8}$	$\frac{6\,q}{7!}x^7\,u(x)$
$q\,u(x-a)$	$\frac{q}{p^5}\,e^{-a\,p}$	$\frac{q}{4!}(x-a)^4\,u(x-a)$
$q\,x\,u(x-a)$	$\frac{q}{p^6}\,e^{-a\,p}$	$\frac{q}{5!}(x-a)^5\,u(x-a)$
$q\,x^2\,u(x-a)$	$\frac{2\,q}{p^7}\,e^{-a\,p}$	$\frac{2\,q}{6!}(x-a)^6\,u(x-a)$
$q\,x^3\,u(x-a)$	$\frac{6\,q}{p^8}\,e^{-a\,p}$	$\frac{6\,q}{7!}(x-a)^7\,u(x-a)$

CUADRO 4

Solicitaciones	w(x) y W(p)	z(x) y sus derivadas
 segmento de carga uniforme	$w(x) = q[u(x-a) - u(x-b)]$ $W(p) = \frac{q}{p}(e^{-a\,p} - e^{-b\,p})$	$z(x) = \frac{q}{24}[(x-a)^4\,u(x-a) - (x-b)^4\,u(x-b)]$ $z'(x) = \frac{q}{6}[(x-a)^3\,u(x-a) - (x-b)^3\,u(x-b)]$ $z''(x) = \frac{q}{2}[(x-a)^2\,u(x-a) - (x-b)^2\,u(x-b)]$ $z'''(x) = q\,[(x-a)\,u(x-a) - (x-b)\,u(x-b)]$
 carga "concentrada"	$w(x) = Q\,\delta(x-a)$ $W(p) = Q\,e^{-a\,p}$	$z(x) = Q\,\frac{(x-a)^3}{6}\,u(x-a)$ $z'(x) = Q\,\frac{(x-a)^2}{2}\,u(x-a)$ $z''(x) = Q\,(x-a)\,u(x-a)$ $z'''(x) = Q\,u(x-a)$
 momento "aislado"	$w(x) = M\,\delta'(x-a)$ $W(p) = M\,p\,e^{-a\,p}$	$z(x) = M\,\frac{(x-a)^2}{2}\,u(x-a)$ $z'(x) = M\,(x-a)\,u(x-a)$ $z''(x) = M\,u(x-a)$ $z'''(x) = M\,\delta(x-a)$

CUADRO 5

§ 5.3 Acciones aisladas en los extremos. Las particularizaciones de la función z(x) para los valores de x = L.

En una viga de longitud "L" el conjunto de las funciones de estado están definidas y tienen normalmente sentido para valores "x" en el intervalo (0, L). Esto implica, por ejemplo, que la función u(x) tomará siempre el valor unidad y es por lo que normalmente evitaremos utilizar la función u(x) cuando multiplica a algún otro factor como veremos en los ejemplos propuestos en el **Φ 6**.

Cuando existen acciones aisladas en el extremo izquierdo origen de abscisas tanto la función z(x) como sus derivadas y sus particularizaciones para x=L son recogidas sin ninguna dificultad y su contribución correctamente evaluada, a través de ellas, sobre las cuatro funciones de estado. Las posibles dificultades sobrevienen en las posibles acciones aisladas en el extremo derecho; esto ocurre en los extremos libres o simplemente apoyados en x = L –figura 5.1–, toda vez que su inclusión se

verificaría a la derecha del extremo derecho que queda, trivialmente, fuera del ámbito del intervalo que subtiende la propia pieza.

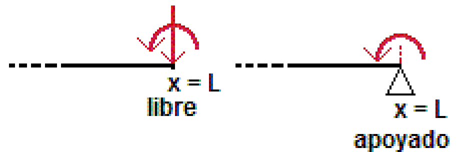


figura 5.1

Existen diferentes maneras de solventar este tipo de problemas pero la más simple es la de precisar que en este caso es por la derecha de L por la que hay que evaluar las particularizaciones de z(x) y de sus derivadas. Es decir: se debe de considerar siempre $z(L) = z(L^+)$, $z'(L)= z'(L^+)$, $z''(L) = z''(L^+)$, $z'''(L) = z'''(L^+)$. Este criterio puede hacerse extensivo con carácter general pero resulta suficiente considerarlo en estas condiciones particulares. Tanto en el desarrollo del apartado **§ 5.1** como en el cuadro 3 se deben de considerar implícitas estas precisiones en las correspondientes particularizaciones de z(x) o de sus derivadas y no se ha hecho así para no complicar innecesariamente la notación y la exposición del método que es, en cualquier caso, muy simple. Tendremos ocasión de aplicar este criterio en alguno de los problemas realizados en el **Φ 6**.

§ 5.4 Precisión acerca de los signos implícitos en el análisis de la flexión simple para las cargas y momentos.

Se habrá advertido que implícitamente hemos venido considerando el origen en el extremo izquierdo de la viga y el eje OX como la directriz recta de la misma en el sistema de ejes habitual "levógiro": eje OX hacia la derecha y el eje OY hacia arriba. Por otro lado, las cargas las consideraremos como positivas en el sentido de solicitación más corriente, esto es: actuando de arriba hacia abajo –sentido "gravitatorio"–. Con estos convenios los descensos de cada sección de la pieza serán positivos y los giros de las secciones dextrógiros resultan positivos en tanto los levógiros son negativos. Esto significa que los resultados de las funciones de deformación no coinciden con los geométricos resultantes de la deformación física. Por esa razón se utilizan diferentes convenios para que se verifique la coincidencia, bien sea establecer en el origen el eje OY hacia abajo o sentido "dextrógiro" de ejes o bien introducir un signo menos en determinadas ecuaciones etc. Estos criterios se encuentran indistintamente en los distintos tratados de la flexión según las preferencias de cada uno.

En cuanto al sentido de las funciones de esfuerzo, estos son completamente independientes de las de deformación. Adoptado el sentido gravitatorio positivo para las cargas ya sean concentradas o distribuidas, deberemos ahora elegir un signo para los momentos aislados. Tomaremos el sentido "levógiro" como positivo para estos momentos lo que resulta congruente con el asignado a las cargas. De esta manera, a momentos flectores negativos en un punto "x" les corresponderá en el entorno de "x" una incurvación de las fibras superiores –a la fibra neutra– contraídas en tanto las inferiores están extendidas. Los resultados numéricos obtenidos para las funciones de esfuerzo coinciden con este criterio y muestran los resultados con su signo correspondiente aunque es muy habitual representar gráficamente los momentos negativos en sentido contrario.

Es significativo representar las gráficas de deformación y esfuerzo de cargas y momentos aislados indistintamente en una viga cualquiera –por ejemplo la doblemente apoyada de las figura 5.2– y representar los signos que resultan de aplicar los criterios establecidos independientemente de cómo se desee disponer las representaciones gráficas para ampliar su expresividad o para acomodarla a la representación acostumbrada. se puede observar, además, que se ha incluido un impulso "δ" en la gráfica de cortantes cuando la viga está solicitada por un momento aislado.

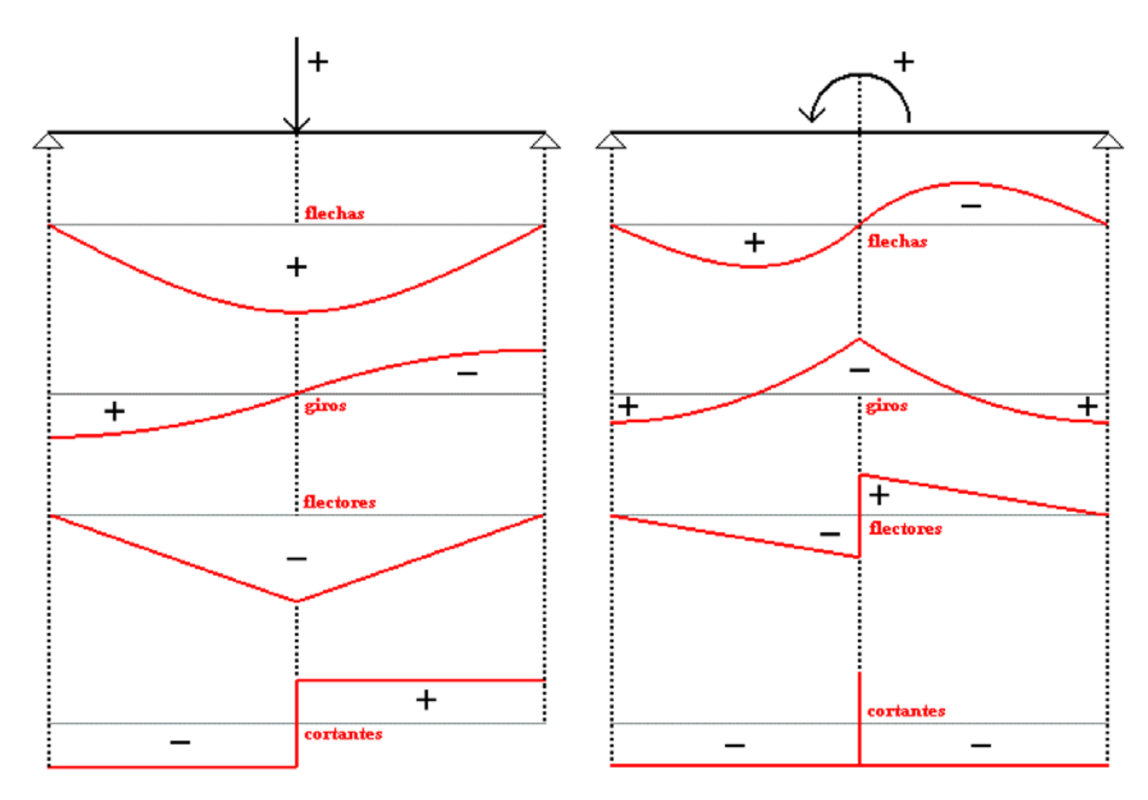


figura 5.2

Φ 6 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 1: Viga empotrada-libre.

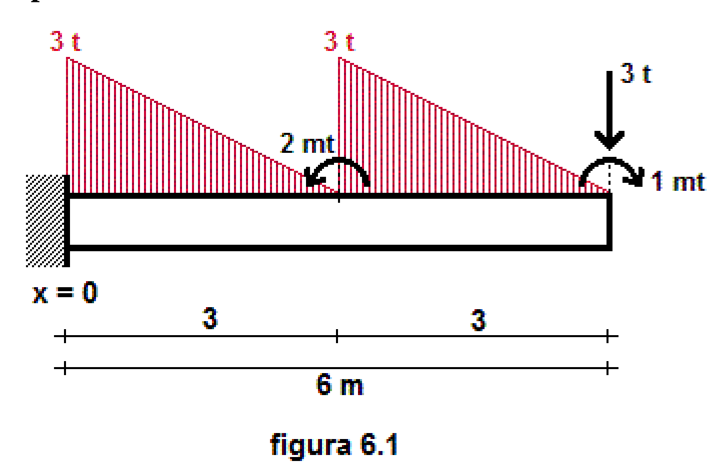


figura 6.1

Se considera la ménsula de longitud L = 6 m. con las divisiones y cargas de la figura 6.1. La ley de cargas vendrá representada por

$w(x) = (-x+3)\,[u(x) - u(x-3)] + (-x+6)\,[u(x-3) - u(x-6)] + 2\,\delta'(x-3) - \delta'(x-6) + 3\,\delta(x-6)$

prescindiremos de la función u(x) pues vale la unidad a lo largo de la longitud "L", así mismo prescindiremos de la contribuciones de carga y momento aislado en el extremo derecho para incluirlos a través de las particularizaciones de $z''(L) = z''(L+)$ y $z'''(L) = z'''(L+)$. Con este criterio y sencillas operaciones aritméticas la ley de cargas puede expresarse en la forma

$w(x) = -x + 3 + 3\,u(x-3) + 2\,\delta'(x-3)$

Teniendo en cuenta los cuadros 4 y 5, la función z(x) correspondiente y sus derivadas serán

$z(x) = -\frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}(x-3)^4\,u(x-3) + (x-3)^2\,u(x-3)$

$z'(x) = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}(x-3)^3\,u(x-3) + 2\,(x-3)\,u(x-3)$

$z''(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}(x-3)^2\,u(x-3) + 2\,u(x-3)$

$z'''(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3\,x + 3\,(x-3)\,u(x-3)$

Los particularizaciones $z''(6) = z''(6+) = \frac{67}{2} - 1 = \frac{65}{2}$ y $z'''(6) = z'''(6+) = 9 + 3 = 12$ nos permiten obtener, siguiendo el modelo del cuadro 3, los factores $\frac{6\,z'''(6+) - z''(6+)}{2} = \frac{79}{4}$ y $\frac{z'''(6+)}{6} = 2$, con los cuales podemos reconstruir la elástica y el resto de funciones de estado según el mismo cuadro

$B\,y(x) = -\frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}(x-3)^4\,u(x-3) + (x-3)^2\,u(x-3) + \frac{79}{4}x^2 - 2\,x^3$

$B\,y'(x) = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}(x-3)^3\,u(x-3) + 2\,(x-3)\,u(x-3) + \frac{79}{2}x - 6\,x^2$

$M(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}(x-3)^2\,u(x-3) + 2\,u(x-3) + \frac{79}{2} - 12\,x$

$T(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3\,x + 3\,(x-3)\,u(x-3) - 12$

funciones que pueden representarse junto a la ley de solicitaciones en la figura 6.2 en la que se han incluido algunos valores significativos de los cortantes, momentos, giros o deformadas particularizados del conjunto de funciones de estado obtenidas.

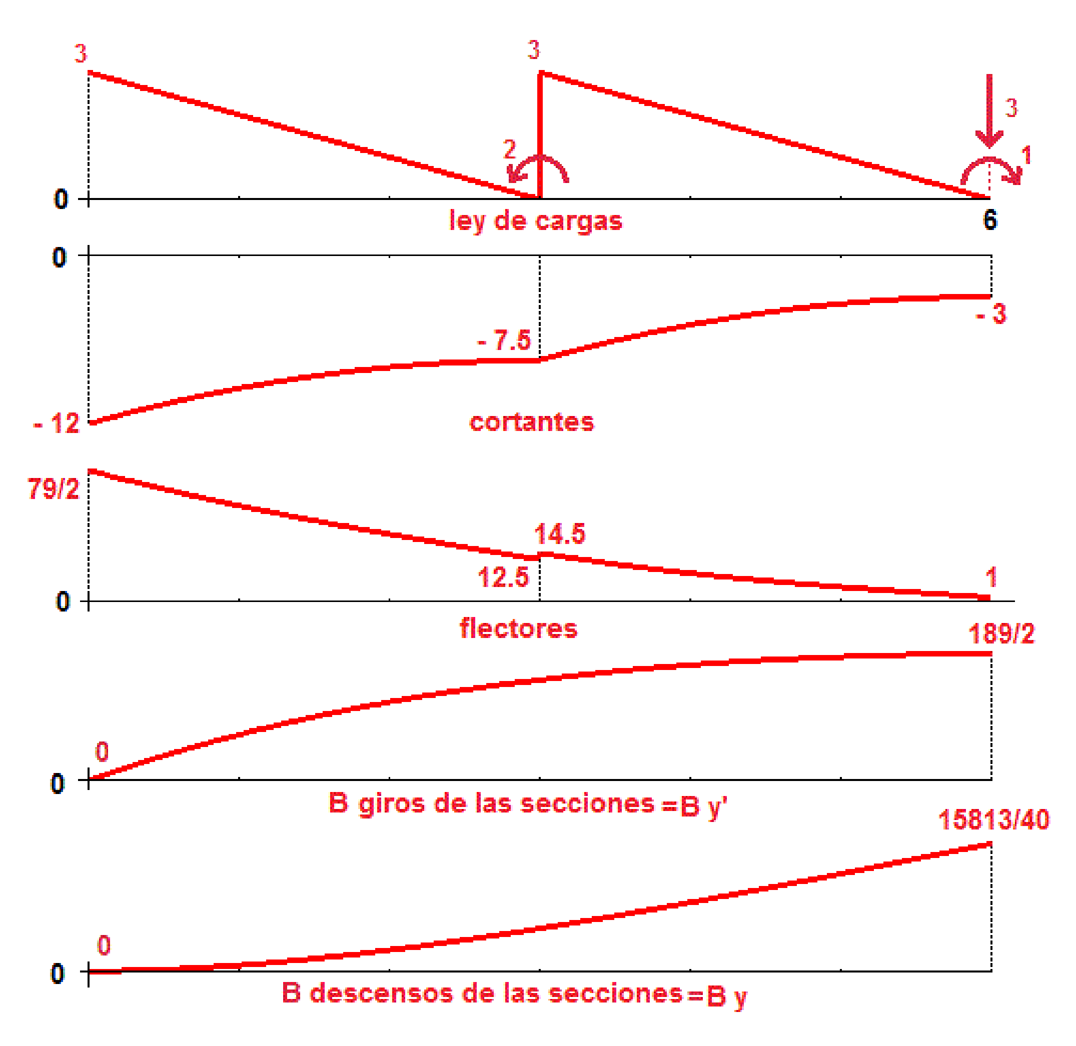


figura 6.2

Ejemplo 2: Viga libre-empotrada.

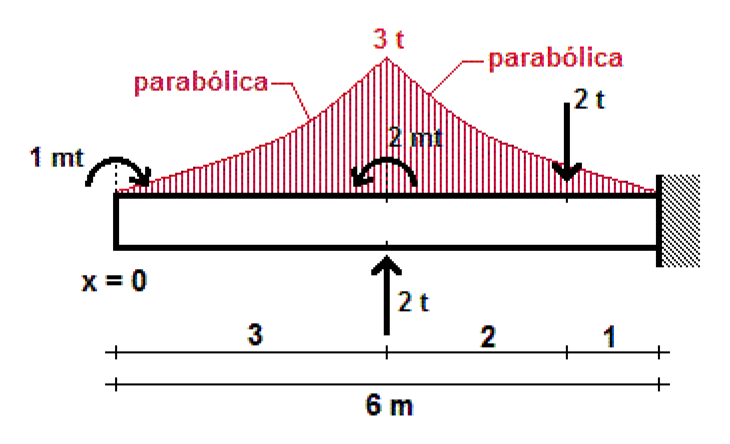


figura 6.3

Consideramos la ménsula libre en su extremo izquierdo, longitud L = 6 m. con las divisiones y cargas de la figura 6.3. Las componentes continuas tienen una envolvente parabólica perteneciendo cada uno de los sectores a parábolas de ecuaciones $c_1 = \frac{1}{3}x^2$ y $c_2 = \frac{1}{3}(x-6)^2$ respectivamente. La ley de cargas será

$$w(x) = -\delta'(x) + \frac{1}{3}x^2\,[u(x)-u(x-3)] + \frac{1}{3}(x-6)^2\,[u(x-3)-u(x-6)] - 2\,\delta(x-3) + 2\,\delta'(x-3) + 2\,\delta(x-5)$$

prescindiendo de $u(x)$ y de $u(x-6)$ y operando los factores de $u(x-3)$, la función resulta

$$w(x) = -\delta'(x) + \frac{1}{3}x^2 - 4\,(x-3)\,u(x-3) - 2\,\delta(x-3) + 2\,\delta'(x-3) + 2\,\delta(x-5)$$

así que la función z(x) y su derivada primera serán

$$z(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{1080}x^6 - \frac{1}{30}(x-3)^5\,u(x-3) - \frac{1}{3}(x-3)^3\,u(x-3) + (x-3)^2\,u(x-3) + \frac{1}{3}(x-5)^3\,u(x-5)$$

$$z'(x) = -x + \frac{1}{180}x^5 - \frac{1}{6}(x-3)^4\,u(x-3) - (x-3)^2\,u(x-3) + 2\,(x-3)\,u(x-3) + (x-5)^2\,u(x-5)$$

Los particularizaciones $z(6) = \frac{523}{30}$ y $z'(6) = \frac{217}{10}$ nos permiten, según el cuadro 3, obtener

$6\,z'(6) - z(6) = \frac{3383}{30}$, $-z'(6) = -\frac{217}{10}$, con lo que

$$B\,y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{1080}x^6 - \frac{1}{30}(x-3)^5\,u(x-3) - \frac{1}{3}(x-3)^3\,u(x-3) + (x-3)^2\,u(x-3) + \frac{1}{3}(x-5)^3\,u(x-5) + \frac{3383}{30} - \frac{217}{10}x$$

$$B\,y'(x) = -x + \frac{1}{180}x^5 - \frac{1}{6}(x-3)^4\,u(x-3) - (x-3)^2\,u(x-3) + 2\,(x-3)\,u(x-3) + (x-5)^2\,u(x-5) - \frac{217}{10}$$

$$M(x) = -1 + \frac{1}{36}x^4 - \frac{2}{3}(x-3)^3\,u(x-3) - 2\,(x-3)\,u(x-3) + 2\,u(x-3) + 2\,(x-5)\,u(x-5)$$

$$T(x) = \frac{1}{9}x^3 - 2\,(x-3)^2\,u(x-3) - 2\,u(x-3) + 2\,u(x-5)$$

funciones de estado que pueden representarse junto a la ley de cargas en la figura 6.4 en la que, asimismo, figuran algunos de los valores representativos de las funciones de estado.

parábola
parábola
3
1
2
2
0
6
2
ley de cargas
5.88
6
3
3.88
0
1
0
cortantes
15
3.25
1.25
0
- 1
flectores
0
0
- 217/10
B giros de las secciones = B y'
3383/30
0
0
B descensos de las secciones = B y

figura 6.4

Ejemplo 3: Viga doblemente apoyada.

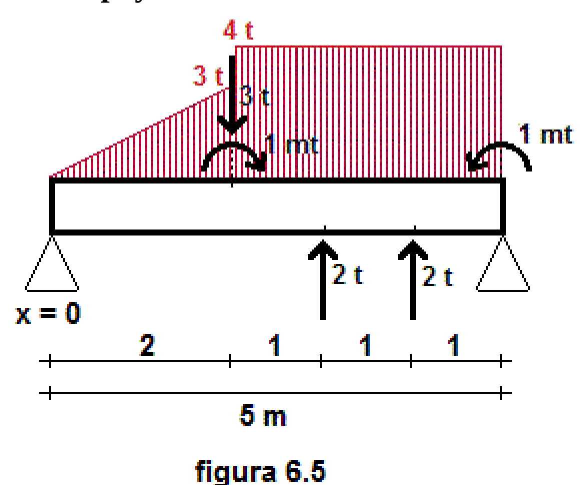


figura 6.5

Consideramos ahora la viga simplemente apoyada en sus dos extremos de longitud L = 5 m. con los segmentos y cargas que se muestran en la figura 6.5. La solicitación vendrá definida por la función

$$w(x) = \frac{3}{2}\, x\, [u(x) - u(x-2)] + 4\, [u(x-2) - u(x-5)] + 3\, \delta(x-2) - \delta'(x-2) - 2\, \delta(x-3) - 2\, \delta(x-4) - \delta'(x-5)$$

operando y prescindiendo de $u(x)$ y de $u(x-5)$ puede escribirse

$w(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}(x-2)\,u(x-2) + u(x-2) + 3\,\delta(x-2) - \delta'(x-2) - 2\,\delta(x-3) - 2\,\delta(x-4) - \delta'(x-5)$

y la función z(x) y sus dos primeras derivadas serán

$z(x) = \frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{80}(x-2)^5\,u(x-2) + \frac{1}{24}(x-2)^4\,u(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^3\,u(x-2) - \frac{1}{2}(x-2)^2\,u(x-2)$
$- \frac{1}{3}(x-3)^3\,u(x-3) - \frac{1}{3}(x-4)^3\,u(x-4)$

$z'(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{16}(x-2)^4\,u(x-2) + \frac{1}{6}(x-2)^3\,u(x-2) + \frac{3}{2}(x-2)^2\,u(x-2) - (x-2)\,u(x-2)$
$- (x-3)^2\,u(x-3) - (x-4)^2\,u(x-4)$

$z''(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}(x-2)^3\,u(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^3\,u(x-2) + 3\,(x-2)\,u(x-2) - u(x-2) - 2\,(x-3)\,u(x-3)$
$- 2\,(x-4)\,u(x-4)$

Los valores $z(5) = z(5+) = \frac{227}{5}$, $z''(5) = z''(5+) = 31 + 1$, nos permiten calcular los factores que afectan a este modelo según el cuadro 3

$\frac{5}{6}z''(5+) - \frac{1}{5}z(5) = \frac{1319}{75} \qquad -\frac{1}{30}z''(5+) = -\frac{16}{15}$

y con ellos, podemos escribir las funciones

$B\,y(x) = \frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{80}(x-2)^5\,u(x-2) + \frac{1}{24}(x-2)^4\,u(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^3\,u(x-2) - \frac{1}{2}(x-2)^2\,u(x-2)$
$- \frac{1}{3}(x-3)^3\,u(x-3) - \frac{1}{3}(x-4)^3\,u(x-4) + \frac{1319}{75}x - \frac{16}{15}x^3$

$B\,y'(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{16}(x-2)^4\,u(x-2) + \frac{1}{6}(x-2)^3\,u(x-2) + \frac{3}{2}(x-2)^2\,u(x-2) - (x-2)\,u(x-2)$
$- (x-3)^2\,u(x-3) - (x-4)^2\,u(x-4) + \frac{1319}{75} - \frac{16}{5}x^2$

$M(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}(x-2)^3\,u(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^3\,u(x-2) + 3\,(x-2)\,u(x-2) - u(x-2) - 2\,(x-3)\,u(x-3)$
$- 2\,(x-4)\,u(x-4) - \frac{32}{5}x$

$T(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}(x-2)^2\,u(x-2) + \frac{3}{2}(x-2)^2\,u(x-2) + 3\,u(x-2) - 2\,u(x-3) - 2\,u(x-4) - \frac{32}{5}$

que, junto a la ley de cargas, quedan representadas en la figura 6.6

Ejemplo 4: Viga empotrada-apoyada.

Se trata de la viga empotrada en su extremo izquierdo y simplemente apoyada en el derecho de L = 5 m. de longitud con los sectores y las cargas de la figura 6.7. La ley de cargas puede escribirse

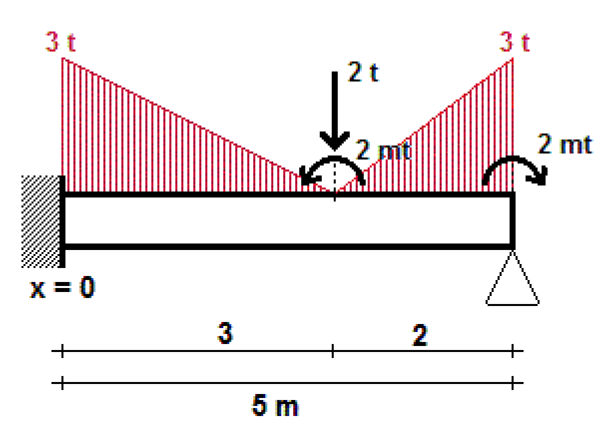


figura 6.7

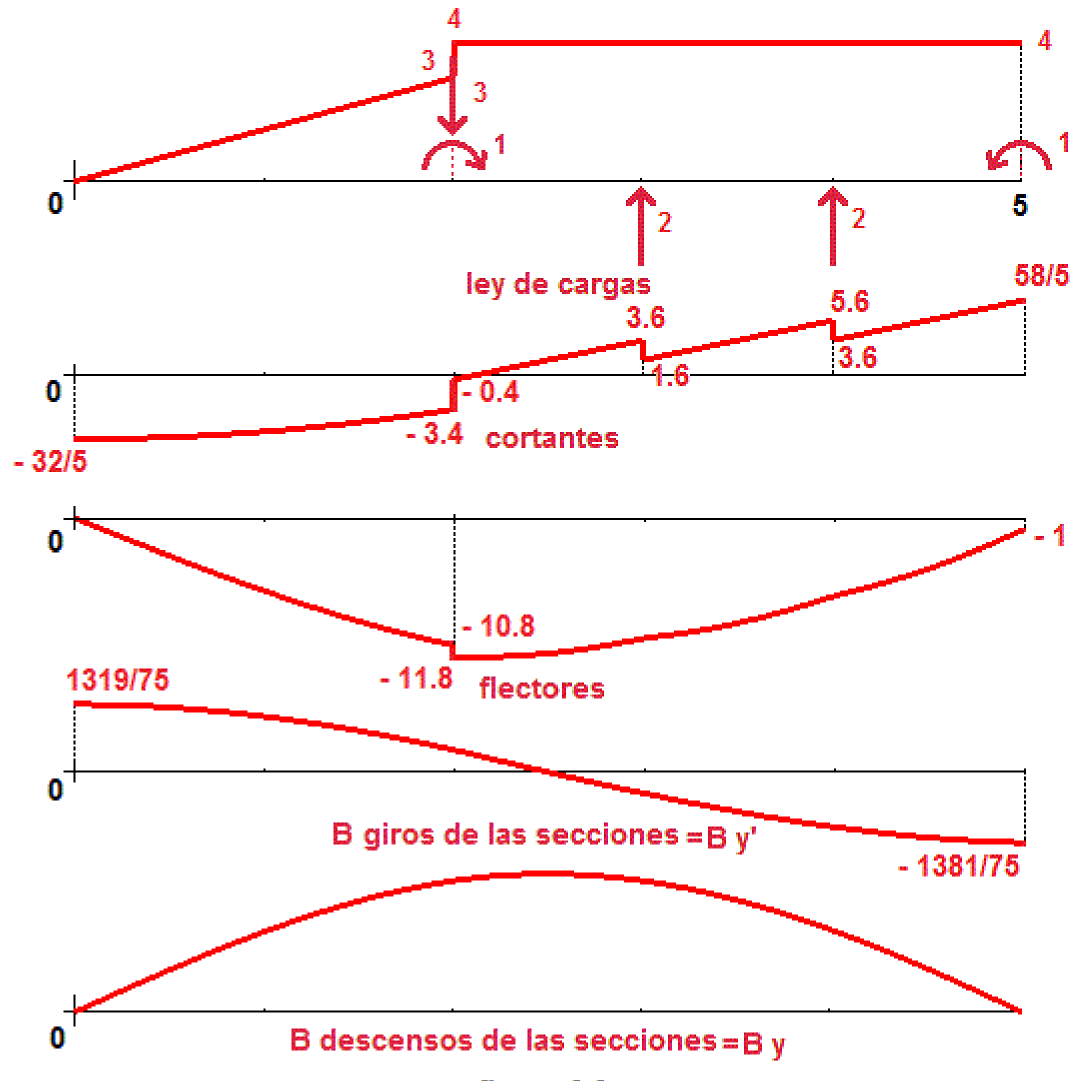


figura 6.6

$w(x) = (-x+3)\,[u(x) - u(x-3)] + (\frac{3}{2}\,x - \frac{9}{2})\,[u(x-3) - u(x-5)] + 2\,\delta(x-3) + 2\,\delta'(x-3) - 2\,\delta'(x-5)$

Prescindiendo de u(x) y de u(x–5) y operando con el factor de u(x–3) resulta

$w(x) = -x+3 + \frac{5}{2}\,(x-3)\,u(x-3) + 2\,\delta(x-3) + 2\,\delta'(x-3) - 2\,\delta'(x-5)$

Las funciones z(x) y sus dos primeras derivadas serán

$z(x) = -\frac{1}{120}\,x^5 + \frac{1}{8}\,x^4 + \frac{1}{48}\,(x-3)^5\,u(x-3) + \frac{1}{3}\,(x-3)^3\,u(x-3) + (x-3)^2\,u(x-3)$

$z'(x) = -\frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{5}{48}\,(x-3)^4\,u(x-3) + (x-3)^2\,u(x-3) + 2\,(x-3)\,u(x-3)$

$z''(x) = -\frac{1}{6}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{5}{12}\,(x-3)^3\,u(x-3) + 2\,(x-3)\,u(x-3) + 2\,u(x-3)$

con los valores $z(5) = \frac{713}{12}$ y $z''(5+) = 26 - 2 = 24$ calculamos los factores

$\frac{1}{4}\,z''(5+) - \frac{3}{50}\,z(5) = \frac{487}{200}\,,\quad \frac{1}{250}\,z(5) - \frac{1}{20}\,z''(5+) = -\frac{2887}{3000}$

con lo que podemos escribir las funciones

$B\,y(x) = -\frac{1}{120}\,x^5 + \frac{1}{8}\,x^4 + \frac{1}{48}\,(x-3)^5\,u(x-3) + \frac{1}{3}\,(x-3)^3\,u(x-3) + (x-3)^2\,u(x-3) + \frac{487}{200}\,x^2 - \frac{2887}{3000}\,x^3$

$B\,y'(x) = -\frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{5}{48}\,(x-3)^4\,u(x-3) + (x-3)^2\,u(x-3) + 2\,(x-3)\,u(x-3) + \frac{487}{100}\,x - \frac{2887}{1000}\,x^2$

$M(x) = -\frac{1}{6}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{5}{12}\,(x-3)^3\,u(x-3) + 2\,(x-3)\,u(x-3) + 2\,u(x-3) + \frac{487}{100} - \frac{2887}{5000}\,x$

$T(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x^2 + \frac{5}{4}(x-3)^2 u(x-3) + 2u(x-3) - \frac{2887}{5000}$

que son las representadas en la figura 6.8

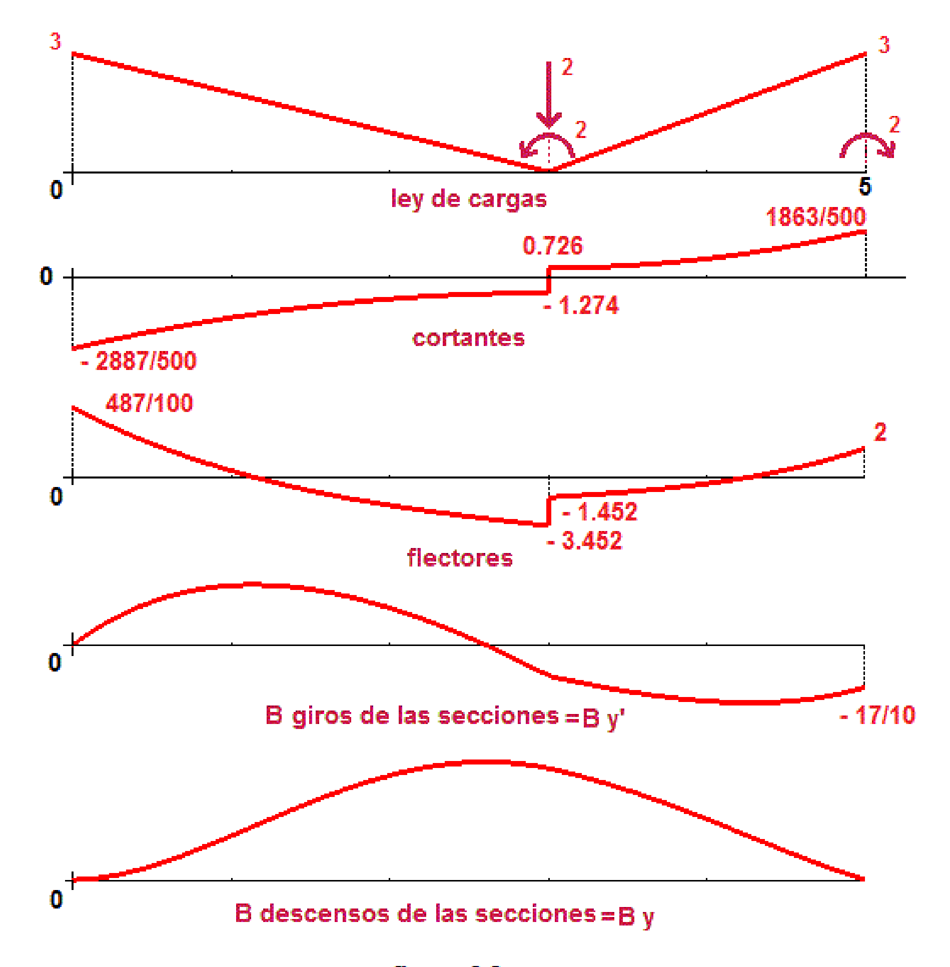


figura 6.8

Ejemplo 5: Viga apoyada-empotrada.

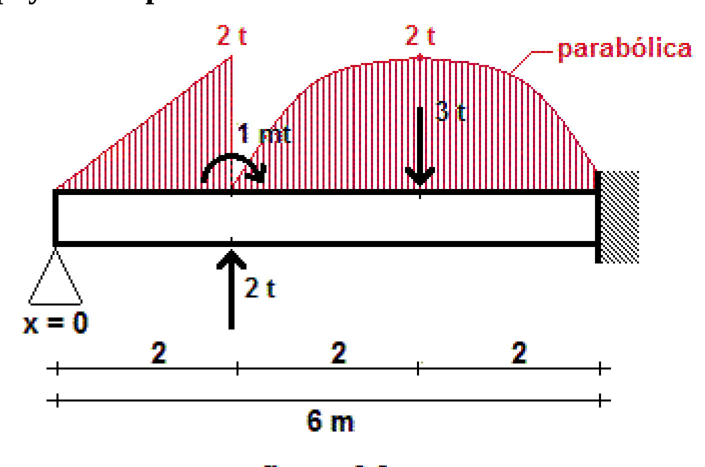


figura 6.9

Se considera la viga de L = 6 m. de longitud definida en [0,6] cargada en su componente continua con un sector lineal en [0,2] y otro de envolvente parabólica cuyo máximo de valor 2t. se encuentra en x = 4 pudiendo ser representada por la ecuación $c = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 2$. Esta solicitación y el resto de cargas y momentos aislados vienen representados en la figura 6.9.

Para esta pieza la ley de cargas vendrá representada por

$w(x) = x\,[u(x) - u(x-2)] + (-\frac{1}{2}(x-4)^2 + 2)\,[u(x-2) - u(x-6)] - 2\,\delta(x-2) - \delta'(x-2) + 3\,\delta(x-4)$

Prescindiendo de u(x) y de u(x–6) y operando con el factor de u(x–2) resulta

$w(x) = x + (-\frac{1}{2}(x-2)^2 + (x-2) - 2)\,u(x-2) - 2\,\delta(x-2) - \delta'(x-2) + 3\,\delta(x-4)$

con lo que la función z(x) y su primera derivada será

$z(x) = \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{720}(x-2)^6\,u(x-2) + \frac{1}{120}(x-2)^5\,u(x-2) - \frac{1}{12}(x-2)^4\,u(x-2) - \frac{1}{3}(x-2)^3\,u(x-2) - \frac{1}{2}(x-2)^2$
$u(x-2) + \frac{1}{2}(x-4)^3\,u(x-4)$

$z'(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}(x-2)^5\,u(x\text{-}2) + \frac{1}{24}(x-2)^4\,u(x-2) - \frac{1}{3}(x-2)^3\,u(x-2) - (x-2)^2\,u(x-2)$
$-(x-2)\,u(x-2) + \frac{3}{2}(x-4)^2\,u(x-4)$

Los valores $z(6) = \frac{944}{45}$ y $z'(6) = \frac{104}{5}$ nos permiten obtener los factores

$\frac{1}{2}z'(6) - \frac{1}{4}z(6) = \frac{232}{45}$, $\frac{1}{432}z(6) - \frac{1}{72}z'(6) = -\frac{292}{1215}$

con los que podemos escribir las funciones de estado

$B\,y(x) = \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{720}(x-2)^6\,u(x\text{-}2) + \frac{1}{120}(x-2)^5\,u(x-2) - \frac{1}{12}(x-2)^4\,u(x-2) - \frac{1}{3}(x-2)^3\,u(x-2) - \frac{1}{2}$
$(x-2)^2\,u(x-2) + \frac{1}{2}(x-4)^3\,u(x-4) + \frac{232}{45}x - \frac{292}{1215}x^3$

$B\,y'(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}(x-2)^5\,u(x-2) + \frac{1}{24}(x-2)^4\,u(x-2) - \frac{1}{3}(x-2)^3\,u(x-2) - (x-2)^2\,u(x-2)$
$-(x-2)\,u(x-2) + \frac{3}{2}(x-4)^2\,u(x-4) + \frac{232}{45} - \frac{292}{405}x^2$

$M(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}(x-2)^4\,u(x-2) + \frac{1}{6}(x-2)^3\,u(x-2) - (x-2)^2\,u(x-2) - 2\,(x-2)\,u(x-2) - u(x-2) + 3\,(x-4)$
$u(x-4) - \frac{584}{405}x$

$T(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3\,u(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2\,u(x-2) - 2\,(x-2)\,u(x-2) - 2\,u(x-2) + 3\,u(x-4) - \frac{584}{405}$

que son las representadas en la figura 6.10

Ejemplo 6: Viga doblemente empotrada.

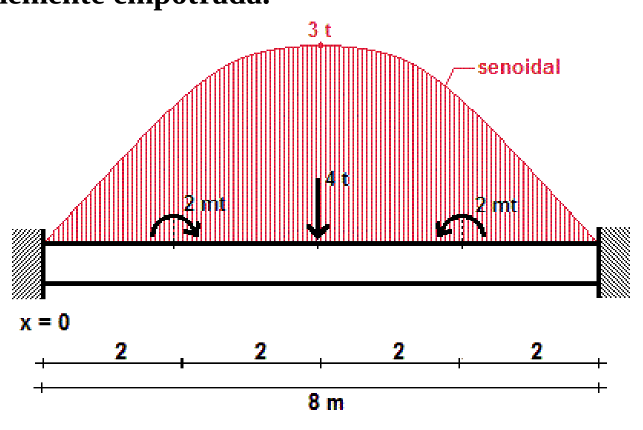


figura 6.11

La barra doblemente empotrada de la figura con una longitud L = 8 m. está solicitada por una sobrecarga de envolvente senoidal, simétrica respecto del eje vertical que pasa por el punto medio de la viga x = 4 m. donde alcanza su máximo de 3 t. Hay además una carga y momentos de flexión aislados en los puntos que se muestran en la figura 6.11. La solicitación completa viene determinada por la ley de cargas

$w(x) = 3\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}x - 2\,\delta'(x-2) + 4\,\delta(x-4) + 2\,\delta'(x-6)$

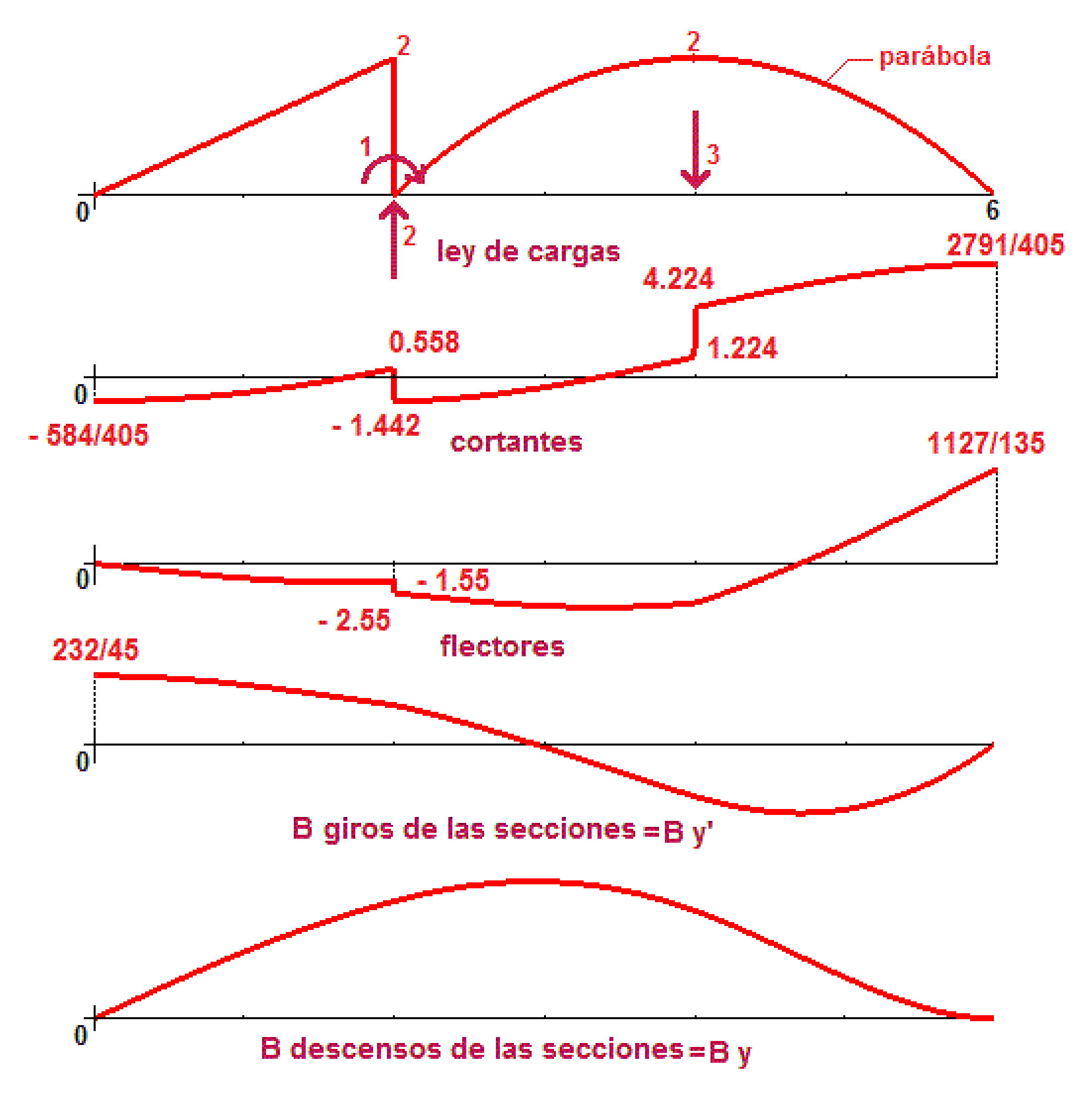


figura 6.10

La transformada de la componente continua wc = 3 sen $\frac{\pi}{8}$ x es $W_c = 3\,\frac{\pi}{8}\,\frac{1}{p^2+(\frac{\pi}{8})^2}$. Para encontrar la transformada inversa de $\frac{W_c}{p^4} = 3\,\frac{\pi}{8}\,\frac{1}{p^4\,(p^2+(\frac{\pi}{8})^2)}$ podemos proceder previamente a su descomposición en fracciones simples, resultando

$$3\,\frac{\pi}{8}\,\frac{1}{p^4\,(p^2+(\frac{\pi}{8})^2)} = \frac{1536}{\pi^3}\quad\frac{1}{p^4\,(p^2+(\frac{\pi}{8})^2)} + \frac{24}{\pi}\,\frac{1}{p^4} - \frac{1536}{\pi^3}\,\frac{1}{p^2}$$

por lo que la función z(x) y su primera derivada resultarán ser

$$z(x) = \frac{12288}{\pi^4}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}\,x + \frac{4}{\pi}\,x^3 - \frac{1536}{\pi^3}\,x - (x-2)^2\,u(x-2) + \frac{2}{3}\,(x-4)^3\,u(x-4) + (x-6)^2\,u(x-6)$$

$$z'(x) = \frac{1536}{\pi^3}\,\cos\frac{\pi}{8}\,x + \frac{12}{\pi}\,x^2 - \frac{1536}{\pi^3} - 2\,(x-2)\,u(x-2) + 2\,(x-4)^2\,u(x-4) + 2\,(x-6)\,u(x-6)$$

Los valores $z(8) = \frac{32}{3} + \frac{2048}{\pi} - \frac{12288}{\pi^3}$ y $z'(8) = -\frac{3072}{\pi^3} + \frac{768}{\pi} + 24$, nos permiten obtener

$$\frac{1}{8}\,z'(8) - \frac{3}{64}\,z(8) = \frac{192}{\pi^3} + \frac{5}{2}\ ;\ \frac{2}{512}\,z(8) - \frac{1}{64}\,z'(8) = -\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi}$$

que son los factores de este modelo según el cuadro 3. Las funciones de estado en este caso serán

$$B\,y(x) = \frac{12288}{\pi^4}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}\,x + \frac{4}{\pi}\,x^3 - \frac{1536}{\pi^3}\,x - (x-2)^2\,u(x-2) + \frac{2}{3}\,(x-4)^3\,u(x-4) + (x-6)^2\,u(x-6)$$
$$+\left(\frac{192}{\pi^3} + \frac{5}{2}\right)x^2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi}\right)x^3$$

B y′(x) = $\frac{1536}{\pi^3}$ cos $\frac{\pi}{8}$ x + $\frac{12}{\pi}$ x^2 – $\frac{1536}{\pi^3}$ – 2 (x–2) u(x–2) + 2 $(x–4)^2$ u(x–4) + 2 (x–6) u(x–6) + ($\frac{384}{\pi^3}$ + 5) x – (1+ $\frac{12}{\pi}$) x^2

M(x) = – $\frac{192}{\pi^2}$ sen $\frac{\pi}{8}$ x + $\frac{24}{\pi}$ x –2 u(x–2) +4 (x–4) u(x–4) +2 u(x–6) + ($\frac{384}{\pi^3}$ + 5) – (2+ $\frac{24}{\pi}$) x

T(x) = – $\frac{24}{\pi}$ cos $\frac{\pi}{8}$ x + $\frac{24}{\pi}$ +4 u(x–4) – 2+ $\frac{24}{\pi}$

cuyas gráficas junto a la ley de cargas pueden verse en la figura 6.12

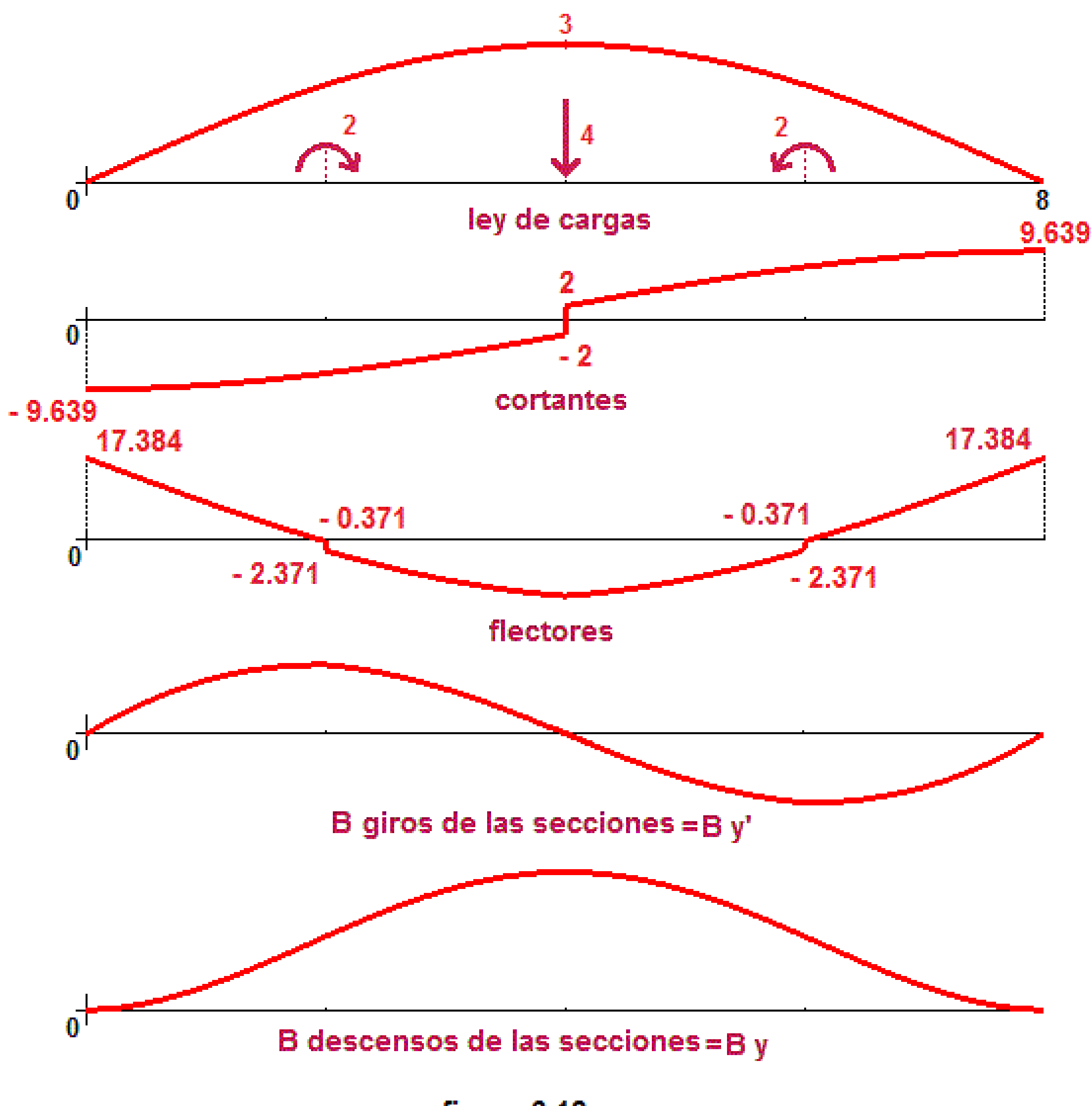


figura 6,12

Φ 7 Extensión a las vigas "continuas".

El método planteado se hace extensivo a las vigas de varios tramos separados por apoyos rígidos interiores denominadas "vigas continuas" siempre que la rigidez B se conserve constante a lo largo de su longitud total. Considerando el extremo izquierdo de toda la pieza como origen de abscisas, bastará substituir cada uno de los apoyos interiores por cargas puntuales desconocidas R_j en cada uno de los valores x=a, x=b, x=c …en los que están situados los apoyos interiores –figura 7.1–. Se procede después a obtener la función y(x) de los desplazamientos con el mismo método empleado en función de los valores R_j y se pasa a obtener estas reacciones desconocidas con las condiciones adicionales y(a)=0, y(b)=0, y(c)=0…Se obtendrá así un sistema de Cramer del que se deducen los valores de estas reacciones y con ellos se reconstruye la función y(x) y sus derivadas.

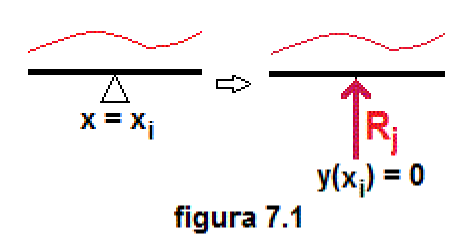


figura 7.1

§ 7.1 Reducibles a modelos estándar.

Cuando los extremos de la viga continua siguen los tipos descritos en el cuadro 3 no hay ninguna precisión adicional y basta la equivalencia con el modelo de un solo tramo y la resolución del sistema de ecuaciones algebraicas correspondiente. Este proceso se describe en los dos ejemplos siguientes

Ejemplo 1

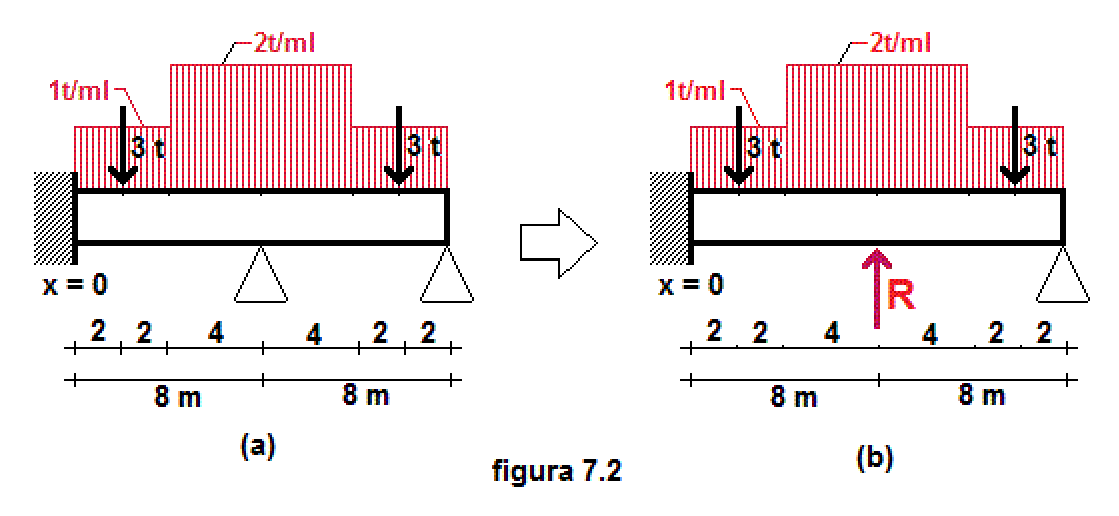


figura 7.2

Para obtener las funciones de estado de la viga continua empotrada-apoyada de dos tramos iguales de 8m. de longitud solicitada como se muestra en la figura 7.2 (a), previamente la reduciremos a una viga simple de un solo tramo como se muestra en la figura 7.2(b). La ley de cargas será

$w(x) = u(x)–u(x\text{-}4) + 2\,[u(x–4)–u(x–12)] + [u(x–16)] + 3\,\delta(x–2) + R\,\delta(x–8) + 3\,\delta(x–14)$

Prescindiendo de u(x) y de u(x–16) y operando los primeros factores se escribirá

$w(x) = 1 + u(x\text{-}4) – u(x–12) + 3\,\delta(x–2) + R\,\delta(x–8) + 3\,\delta(x–14)$

con lo que la función z(x) y sus dos primeras derivadas serán

$z(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}(x–2)^3\,u(x–2) + \frac{1}{24}(x–4)^4\,u(x–4) + \frac{R}{6}(x–8)^3\,u(x–8) – \frac{1}{24}(x–12)^4\,u(x–12)$
$+ \frac{1}{2}(x–14)^3\,u(x–14)$

$z'(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}(x–2)^2\,u(x–2) + \frac{1}{6}(x–4)^3\,u(x–4) + \frac{R}{2}(x–8)^2\,u(x–8) – \frac{1}{6}(x–12)^3\,u(x–12)$
$+ \frac{3}{2}(x–14)^2\,u(x–14)$

$z''(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3\,(x–2)\,u(x–2) + \frac{1}{2}(x–4)^2\,u(x–4) + R\,(x–8)\,u(x–8) – \frac{1}{2}(x–12)^2\,u(x–12)$
$+\; 3\,(x–14)\,u(x–14)$

Las particularizaciones $z(16) = 4960 + \frac{256}{3}R$ y $z''(16) = 240 + 8\,R$ nos permiten obtener

$\frac{1}{4}z''(16) – \frac{3}{512}z(16) = \frac{495}{16} + \frac{3}{2}R,\quad \frac{1}{8192}z(16) – \frac{1}{64}z''(16) = –\frac{805}{256} – \frac{11}{96}R$

con lo que la función y(x) quedará

$B\ y(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}(x-2)^3\,u(x-2) + \frac{1}{24}(x-4)^4\,u(x-4) + \frac{R}{6}(x-8)^3\,u(x-8) - \frac{1}{24}(x-12)^4\,u(x-12)$
$+ \frac{1}{2}(x-14)^3\,u(x-14) + (\frac{495}{16} + \frac{3}{2}R)\,x^2 + (-\frac{805}{256} - \frac{11}{96}R)\,x^3$

De la condición $y(8) = \frac{1}{24}8^4 + \frac{1}{2}(8-2)^3 + \frac{1}{24}(8-4)^4 + (\frac{495}{16} + \frac{3}{2}R)\,8^2 + (-\frac{805}{256} - \frac{11}{96}R)\,8^3 = 0$

se deduce $R = -\frac{989}{56}$ y con este valor las funciones de estado serán

$B\ y(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}(x-2)^3\,u(x-2) + \frac{1}{24}(x-4)^4\,u(x-4) - \frac{989}{336}(x-8)^3\,u(x-8) - \frac{1}{24}(x-12)^4\,u(x-12)$
$+ \frac{1}{2}(x-14)^3\,u(x-14) + \frac{249}{56}x^2 - \frac{3013}{2688}x^3$

$B\ y'(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}(x-2)^2\,u(x-2) + \frac{1}{6}(x-4)^3\,u(x-4) - \frac{989}{112}(x-8)^2\,u(x-8) - \frac{1}{6}(x-12)^3\,u(x-12)$
$+ \frac{3}{2}(x-14)^2\,u(x-14) + \frac{249}{28}x - \frac{3013}{896}x^3$

$M(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3\,(x-2)\,u(x-2) + \frac{1}{2}(x-4)^2\,u(x-4) - \frac{989}{56}(x-8)\,u(x-8) - \frac{1}{2}(x-12)^2\,u(x-12)$
$+\ 3\,(x-14)\,u(x-14) + \frac{249}{28} - \frac{6039}{896}x^2$

$T(x) = x + 3\,u(x-2) + (x-4)\,u(x-4) - \frac{989}{56}u(x-8) - (x-12)\,u(x-12) + 3\,u(x-14)\ - \frac{6039}{448}x$

funciones que pueden ser representadas como en la figura 7.3

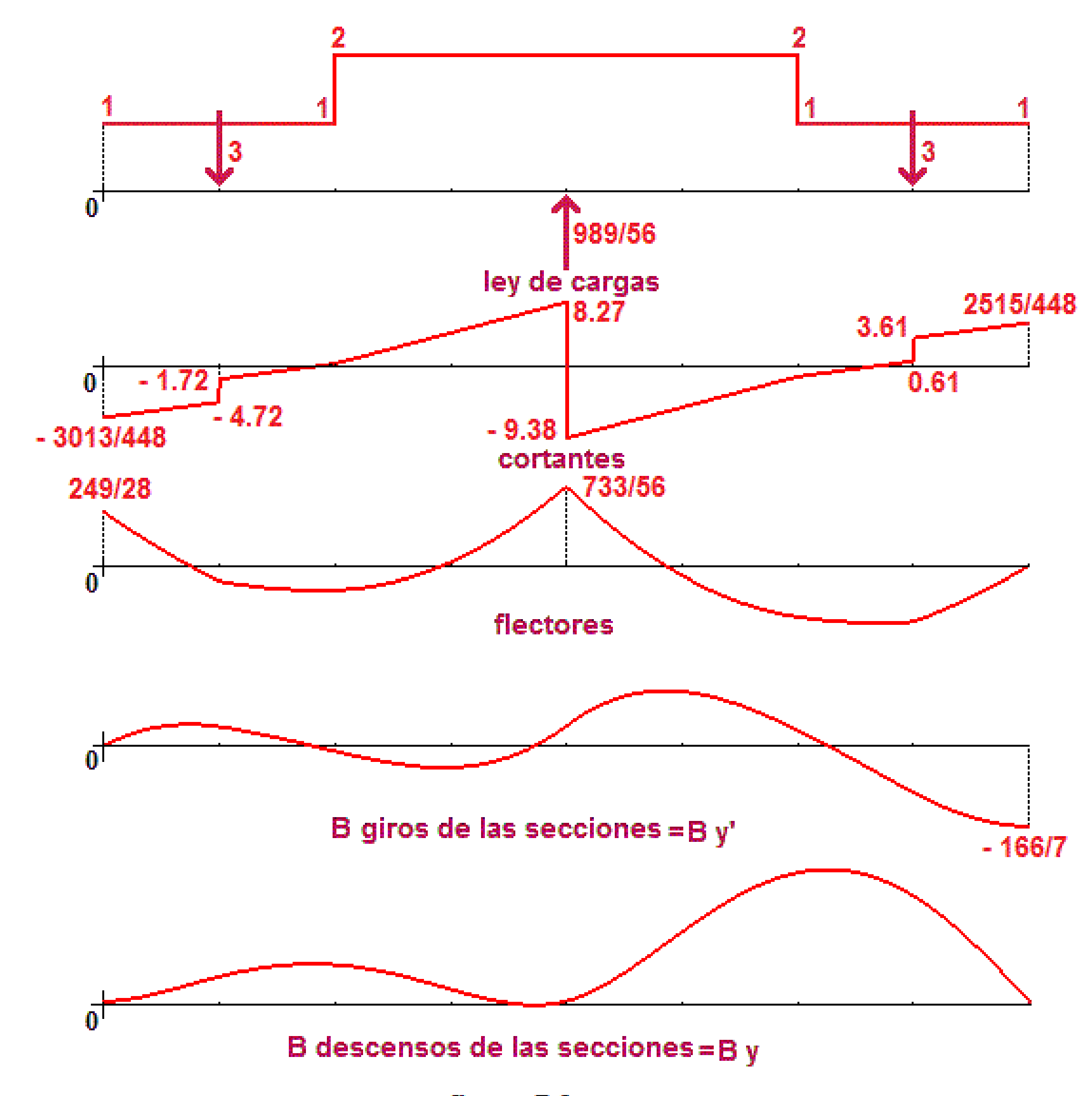


figura 7.3

Ejemplo 2.

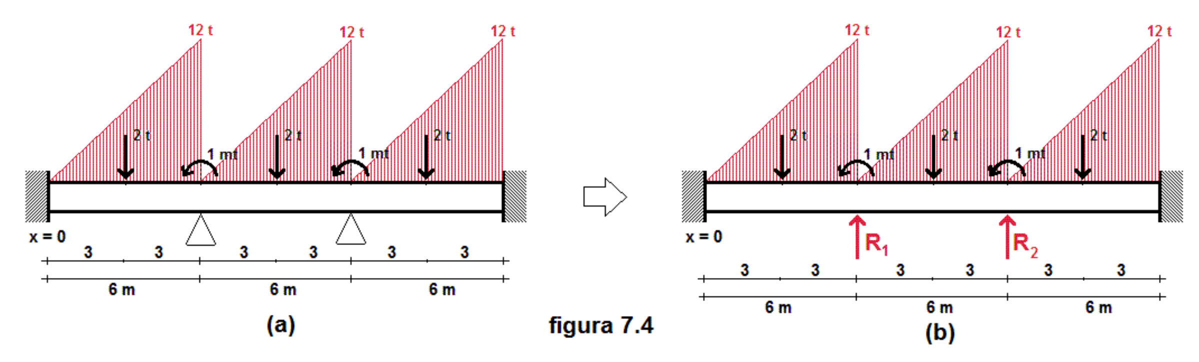


figura 7.4

Consideramos ahora la viga continua de tres tramos iguales de 6 m de longitud cada uno, empotrada en sus dos extremos y solicitada por las cargas y sobrecargas que se representan en la figura 7.4 (a) y el modelo equivalente de un tramo en (b). La ley de cargas será aquí

$w(x) = 2x\,[u(x) - u(x-6)] + 2(x-6)\,[u(x-6) - u(x-12)] + 2(x-12)\,[u(x-12) - u(x-18)]$
$+ 2\,\delta(x-3) + 2\,\delta(x-9) + 2\,\delta(x-15) + R_1\,\delta(x-6) + R_2\,\delta(x-12) + \delta'(x-6) + \delta'(x-12)$

Prescindiendo de u(x) y u(x–18) y operando los primeros factores se expresará por

$w(x) = 2x - 12\,u(x-6) - 12\,u(x-12) + 2\,\delta(x-3) + 2\,\delta(x-9) + 2\,\delta(x-15) + R_1\,\delta(x-6) + R_2\,\delta(x-12)$
$+ \delta'(x-6) + \delta'(x-12)$

La función z(x) y su derivada primera serán

$z(x) = \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{3}(x-3)^3\,u(x-3) - \frac{1}{2}(x-6)^4\,u(x-6) + \frac{1}{2}(x-6)^2\,u(x-6) + \frac{R_1}{6}(x-6)^3\,u(x-6)$
$+ \frac{1}{3}(x-9)^3\,u(x-9) - \frac{1}{2}(x-12)^4\,u(x-12) + \frac{1}{2}(x-12)^2\,u(x-12) + \frac{R_2}{6}(x-12)^3\,u(x-12) + \frac{1}{3}(x-15)^3\,u(x-15)$
$z'(x) = \frac{1}{12}x^4 + (x-3)^2\,u(x-3) - 2(x-6)^3\,u(x-6) + (x-6)\,u(x-6) + \frac{R_1}{2}(x-6)^2\,u(x-6) + (x-9)^2\,u(x-9)$
$- 2(x-12)^3\,u(x-12) + (x-12)\,u(x-12) + \frac{R_2}{2}(x-12)^2\,u(x-12) + (x-15)^2\,u(x-15)$

los factores

$\frac{1}{18}z'(18) - \frac{1}{108}z(18) = \frac{5119}{60} + \frac{4}{3}R_1 + \frac{2}{3}R_2$; $\frac{1}{2916}z(18) - \frac{1}{324}z'(18) = -\frac{6887}{810} - \frac{10}{81}R_1 - \frac{7}{162}R_2$

nos permiten escribir la deformada

$B\,y(x) = \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{3}(x-3)^3\,u(x-3) - \frac{1}{2}(x-6)^4\,u(x-6) + \frac{1}{2}(x-6)^2\,u(x-6) + \frac{R_1}{6}(x-6)^3\,u(x-6)$
$+ \frac{1}{3}(x-9)^3\,u(x-9) - \frac{1}{2}(x-12)^4\,u(x-12) + \frac{1}{2}(x-12)^2\,u(x-12) + \frac{R_2}{6}(x-12)^3\,u(x-12)$
$+ \frac{1}{3}(x-15)^3\,u(x-15) + \left(\frac{5119}{60} + \frac{4}{3}R_1 + \frac{2}{3}R_2\right)x^2 + \left(-\frac{6887}{810} - \frac{10}{81}R_1 - \frac{7}{162}R_2\right)x^3$

y las soluciones R_1 y R_2 de las dos ecuaciones y(6) = 0 ; y(12)= 0 proporcionan

$R_1 = -\frac{1941}{50}$; $R_2 = -\frac{1859}{50}$

con las cuales podemos rescribir la ecuación de la deformada y sus derivadas

$B\,y(x) = \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{3}(x-3)^3\,u(x-3) - \frac{1}{2}(x-6)^4\,u(x-6) + \frac{1}{2}(x-6)^2\,u(x-6) - \frac{647}{100}(x-6)^3\,u(x-6)$
$+ \frac{1}{3}(x-9)^3\,u(x-9) - \frac{1}{2}(x-12)^4\,u(x-12) + \frac{1}{2}(x-12)^2\,u(x-12) - \frac{1859}{300}(x-12)^3\,u(x-12)$
$+ \frac{1}{3}(x-15)^3\,u(x-15) + \frac{877}{100}x^2 - \frac{631}{300}x^3$
$B\,y'(x) = \frac{1}{12}x^4 + (x-3)^2\,u(x-3) - 2(x-6)^3\,u(x-6) + (x-6)\,u(x-6) - \frac{1941}{100}(x-6)^2\,u(x-6)$
$+ (x-9)^2\,u(x-9) - 2(x-12)^3\,u(x-12) + (x-12)\,u(x-12) - \frac{1859}{100}(x-12)^2\,u(x-12) + (x-15)^2\,u(x-15)$
$+ \frac{877}{50}x - \frac{631}{100}x^2$

$M(x) = \frac{1}{3}\,x^3 + 2\,(x–3)\,u(x–3) – 6\,(x–6)^2\,u(x–6) + u(x–6) – \frac{1941}{50}\,(x–6)\,u(x–6) + 2\,(x–9)\,u(x–9) – 6\,(x–12)^2\,u(x–12) + u(x–12) – \frac{1859}{50}\,(x–12)\,u(x–12) + 2\,(x–15)\,u(x–15) + \frac{877}{50} – \frac{631}{50}\,x$

$T(x) = x^2 + 2\,u(x–3) – 12\,(x–6)\,u(x–6) – \frac{1941}{50}\,u(x–6) + 2\,u(x–9) – 12\,(x–12)\,u(x–12) – \frac{1859}{50}\,u(x–12) + 2\,u(x–15) – \frac{631}{50}$

que pueden representarse como en la figura 7.5

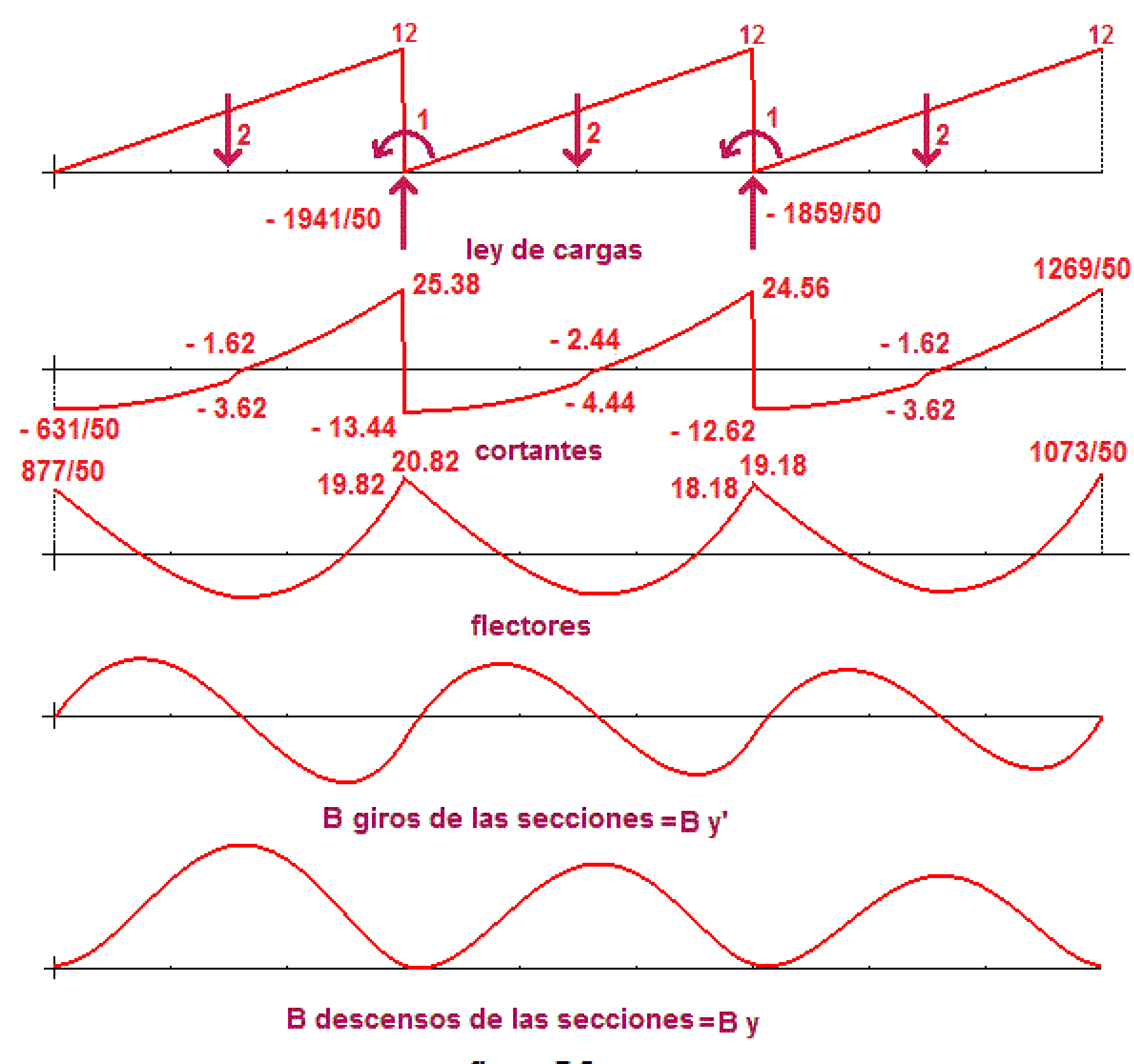


figura 7.5

§ 7.2 Vigas continuas con voladizos en los extremos.

La extensión a las vigas de varios tramos nos llevaría a considerar tres nuevos modelos de vigas a las que deberán ser reducidas otros tantos modelos con voladizos en uno de sus extremos o en ambos. Esto es: podríamos incorporar a los modelos los de vigas libre-apoyada, apoyada-libre y libre-libre en la hipótesis necesaria de que se trata de vigas continuas con apoyos rígidos interiores. La forma más simple de resolver estos casos es partir de la ecuación inicial (1) válida inicialmente para cualquier tipo de viga de rigidez constante escrita en la forma

$$B\,y(x) = z(x) + B\,y(0)\,u(x) + B\,y'(0)\,x + \frac{1}{2}\,B\,y''(0)\,x^2 + \frac{1}{6}\,B\,y'''(0)\,x^3 \qquad (3)$$

donde impondremos las condiciones conocidas del vínculo en el extremo izquierdo obligándola posteriormente a que satisfagan las condiciones del extremo derecho a través del sistema de ecuaciones algebraicas correspondiente. Dos ejercicios nos permitirá mostrar el procedimiento.

Ejemplo 1.

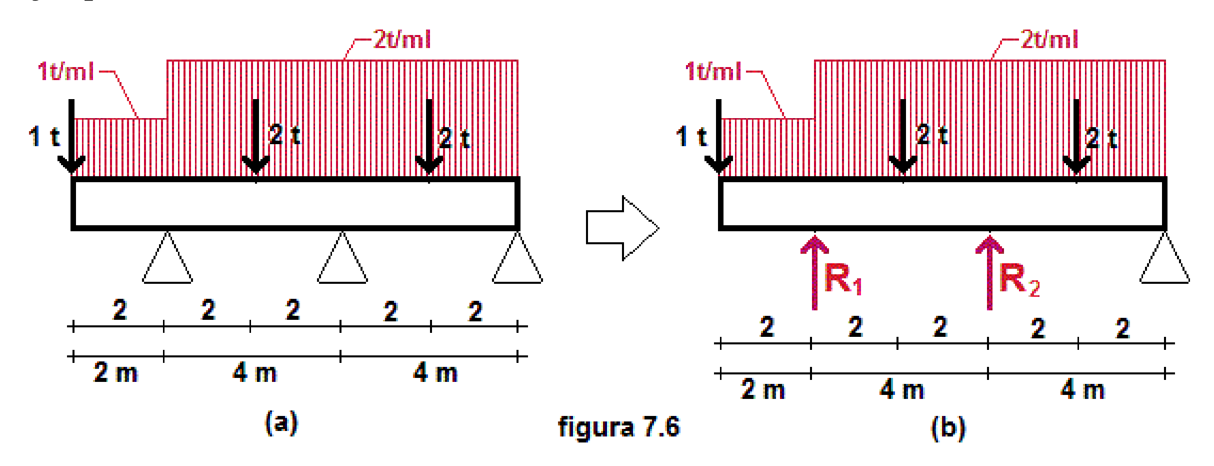


figura 7.6

El modelo de viga continua con las dimensiones y cargas mostradas en la figura 7.6 (a) puede ser reducido a una viga de un solo tramo representado en la figura 7.6 (b) que no es un modelo estandarizado en el cuadro 3.

La ley de cargas será

$w(x) = \delta(x) + u(x) - u(x\text{-}2) + 2\,[u(x-2) - u(x-10)] + R_1\,\delta(x-2) + 2\,\delta(x-4) + R_2\,\delta(x-6) + 2\,\delta(x-8)$

Prescindiendo de u(x) y de u(x–10) y operando los primeros factores resulta

$w(x) = \delta(x) + 1 + u(x\text{-}2) + R_1\,\delta(x-2) + 2\,\delta(x-4) + R_2\,\delta(x-6) + 2\,\delta(x-8)$

La correspondiente función z(x) será

$z(x) = \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{R_1}{6}\,(x-2)^3\,u(x-2) + \frac{1}{24}\,(x-2)^4\,u(x-2) + \frac{1}{3}\,(x-4)^3\,u(x-4) + \frac{R_2}{6}\,(x-6)^3\,u(x-6)$
$+ \frac{1}{3}\,(x-8)^3\,u(x-8)$

Teniendo en cuenta las condiciones de extremo izquierdo la función y(x) y sus dos primeras derivadas podrán expresarse por

$B\,y(x) = \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{R_1}{6}\,(x-2)^3\,u(x-2) + \frac{1}{24}\,(x-2)^4\,u(x-2) + \frac{1}{3}\,(x-4)^3\,u(x-4) + \frac{R_2}{6}\,(x-6)^3\,u(x-6)$
$+ \frac{1}{3}\,(x-8)^3\,u(x-8) + B\,y(0) + B\,y'(0)\,x$
$B\,y'(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{R_1}{2}\,(x-2)^2\,u(x-2) + \frac{1}{6}\,(x-2)^3\,u(x-2) + (x-4)^2\,u(x-4) + \frac{R_2}{2}\,(x-6)^2\,u(x-6)$
$+ (x-8)^2\,u(x-8) + B\,y'(0)$
$B\,y''(x) = x^2 + \frac{1}{2}\,x^2 + R_1\,(x-2)\,u(x-2) + \frac{1}{2}\,(x-2)^2\,u(x-2) + 2\,(x-4)\,u(x-4) + R_2\,(x-6)\,u(x-6)$
$+ 2\,(x-8)\,u(x-8)$

Las cuatro condiciones $y(2) = 0$, $y(6) = 0$, $y(10) = 0$, $y''(10) = 0$ nos permiten obtener las

$B\,y(0) = \frac{20}{3}$, $B\,y'(0) = -\frac{13}{3}$, $R_1 = -\frac{63}{8}$ $\quad R_2 = -\frac{45}{4}$

con las cuales pueden reconstruirse las funciones de estado

$B\,y(x) = \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{21}{16}\,(x-2)^3\,u(x-2) + \frac{1}{24}\,(x-2)^4\,u(x-2) + \frac{1}{3}\,(x-4)^3\,u(x-4) + \frac{15}{8}\,(x-6)^3\,u(x-6)$
$+ \frac{1}{3}\,(x-8)^3\,u(x-8) + \frac{20}{3} - \frac{13}{3}\,x$
$B\,y'(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{63}{16}\,(x-2)^2\,u(x-2) + \frac{1}{6}\,(x-2)^3\,u(x-2) + (x-4)^2\,u(x-4) + \frac{45}{8}\,(x-6)^2\,u(x-6)$
$+ (x-8)^2\,u(x-8) - \frac{13}{3}$

$M(x) = \; x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{63}{8}(x\!-\!2)\,u(x\!-\!2) + \frac{1}{2}(x\!-\!2)^2\,u(x\!-\!2) + 2\,(x\!-\!4)\,u(x\!-\!4) + \frac{45}{4}(x\!-\!6)\,u(x\!-\!6)$
$+ \, 2\,(x\!-\!8)\,u(x\!-\!8)$

$T(x) = \; 1 + x + \frac{63}{8}\,u(x\!-\!2) + (x\!-\!2)\,u(x\!-\!2) + 2\,u(x\!-\!4) + \frac{45}{4}\,u(x\!-\!6) + 2\,(x\!-\!8)\,u(x\!-\!8)$

que vienen representadas en la figura 7.7

ley de cargas

cortantes

flectores

B giros de las secciones = B y'

B descensos de las secciones = B y

figura 7.7

Ejemplo 2.

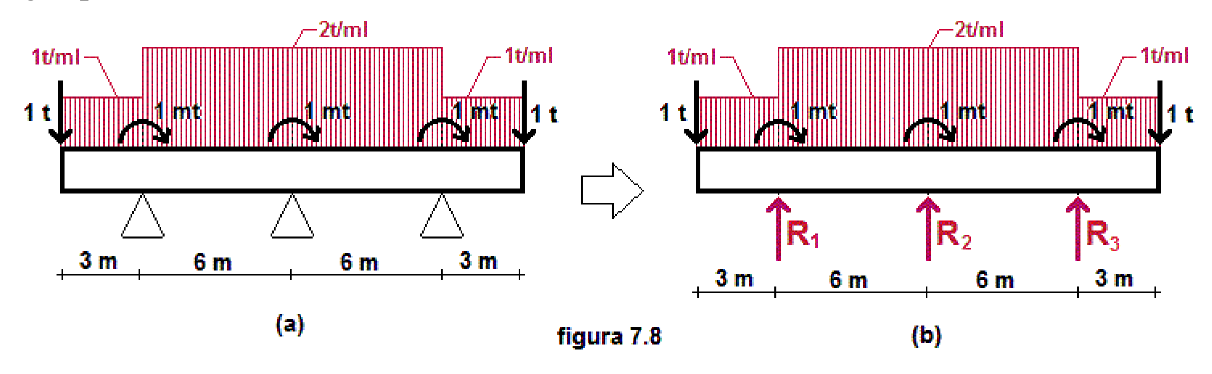


figura 7.8

El modelo de viga continua con las dimensiones y cargas mostradas en la figura 7.8 (a) puede ser reducido a una viga de un solo tramo representado en la misma figura (b) que no es un modelo estandarizado en el cuadro 3.

La ley de cargas es

$w(x) = u(x) - u(x\text{-}3) + 2\,[u(x\text{-}3) - u(x\text{-}15)] + [u(x-15) - u(x-18)] + \delta(x) - \delta'(x-3) + R_1\,\delta(x-3)$
$- \delta'(x-9) + R_2\,\delta(x-9) - \delta'(x-15) + R_3\,\delta(x-15) + \delta(x-18)$

Prescindiendo de la función u(x) y de la contribución de la carga en el extremo derecho para incluirla a través de las particularización de $B\,y'''(18) = B\,y'''(18+)$ y operando los primeros factores quedará

$w(x) = 1 + u(x\text{-}3) - u(x-15) + \delta(x) - \delta'(x-3) + R_1\,\delta(x-3) - \delta'(x-9) + R_2\,\delta(x-9) - \delta'(x-15)$
$+ R_3\,\delta(x-15)$

La correspondiente función z(x) es

$z(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{24}(x-3)^4 u(x-3) - \frac{1}{2}(x-3)^2 u(x-3) + \frac{R_1}{6}(x-3)^3 u(x-3) - \frac{1}{2}(x-9)^2 u(x-9)$
$+ \frac{R_2}{6}(x-9)^3 u(x-9) - \frac{1}{24}(x-15)^4 u(x-15) - \frac{1}{2}(x-15)^2 u(x-15) + \frac{R_3}{6}(x-15)^3 u(x-15)$

Teniendo en cuenta las condiciones del extremo izquierdo, la función y(x) y sus derivadas serán

$B\,y(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{24}(x-3)^4 u(x-3) - \frac{1}{2}(x-3)^2 u(x-3) + \frac{R_1}{6}(x-3)^3 u(x-3) - \frac{1}{2}(x-9)^2 u(x-9)$
$+ \frac{R_2}{6}(x-9)^3 u(x-9) - \frac{1}{24}(x-15)^4 u(x-15) - \frac{1}{2}(x-15)^2 u(x-15) + \frac{R_3}{6}(x-15)^3 u(x-15) + B\,y(0) + B\,y'(0)\,x$
$B\,y'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}(x-3)^3 u(x-3) - (x-3)\,u(x-3) + \frac{R_1}{2}(x-3)^2 u(x-3) - (x-9)\,u(x-9)$
$+ \frac{R_2}{2}(x-9)^2 u(x-9) - \frac{1}{6}(x-15)^3 u(x-15) - (x-15)\,u(x-15) + \frac{R_3}{2}(x-15)^2 u(x-15) + B\,y'(0)$
$B\,y''(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x-3)^2 u(x-3) - u(x-3) + R_1\,(x-3)\,u(x-3) - u(x-9) + R_2\,(x-9)\,u(x-9)$
$- \frac{1}{2}(x-15)^2 u(x-15) - u(x-15) + R_3\,(x-15)\,u(x-15)$
$B\,y'''(x) = 1 + x + (x-3)\,u(x-3) + R_1\,u(x-3) + R_2\,u(x-9) - (x-15)\,u(x-15) + R_3\,u(x-15)$

El sistema de cinco ecuaciones ecuaciones $y''(18) = 0$, $y'''(18+) + 1 = 0$, $y(3) = 0$, $y(9) = 0$, $y(15) = 0$ nos permite calcular $B\,y(0)$, $B\,y'(0)$, R_1, R_2, R_3

$B\,y(0) = \frac{171}{8}$, $B\,y'(0) = -\frac{39}{4}$, $R_1 = -\frac{81}{8}$, $R_2 = -\frac{45}{4}$, $R_3 = -\frac{85}{8}$

y con estos valores podemos reconstruir las funciones y(x) y sus derivadas

$B\,y(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{24}(x-3)^4 u(x-3) - \frac{1}{2}(x-3)^2 u(x-3) - \frac{27}{16}(x-3)^3 u(x-3) - \frac{1}{2}(x-9)^2 u(x-9)$
$- \frac{15}{8}(x-9)^3 u(x-9) - \frac{1}{24}(x-15)^4 u(x-15) - \frac{1}{2}(x-15)^2 u(x-15) - \frac{85}{48}(x-15)^3 u(x-15) + \frac{171}{8} - \frac{39}{4}x$
$B\,y'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}(x-3)^3 u(x-3) - (x-3)\,u(x-3) - \frac{81}{16}(x-3)^2 u(x-3) - (x-9)\,u(x-9)$
$- \frac{45}{8}(x-9)^2 u(x-9) - \frac{1}{6}(x-15)^3 u(x-15) - (x-15)\,u(x-15) - \frac{85}{16}(x-15)^2 u(x-15) - \frac{39}{4}$
$B\,y''(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x-3)^2 u(x-3) - u(x-3) - \frac{81}{8}(x-3)\,u(x-3) - u(x-9) - \frac{45}{4}(x-9)\,u(x-9)$
$- \frac{1}{2}(x-15)^2 u(x-15) - u(x-15) - \frac{85}{8}(x-15)\,u(x-15)$
$B\,y'''(x) = 1 + x + (x-3)\,u(x-3) - \frac{81}{8}u(x-3) - \frac{45}{4}u(x-9) - (x-15)\,u(x-15) - \frac{85}{8}u(x-15)$

y representar sus gráficas en la figura 7.9

Φ 8 Extensión a las vigas "compuestas".

Hasta aquí, hemos venido utilizando implícitamente el principio de que en cada abscisa "x" la correspondiente sección de una la constituye una unión "rígida" caracterizada por ser unión entre dos sectores de la pieza que comparten la misma deformación y el mismo giro a derecha e izquierda de la sección lo que implica que la función y(x) sea una función de clase uno. El posible salto discontinuo de la derivada segunda quedaría condicionado a la existencia de momentos de flexión aislados medido en escala B y el de la derivada tercera condicionado a su vez a la existencia de cargas puntuales en la

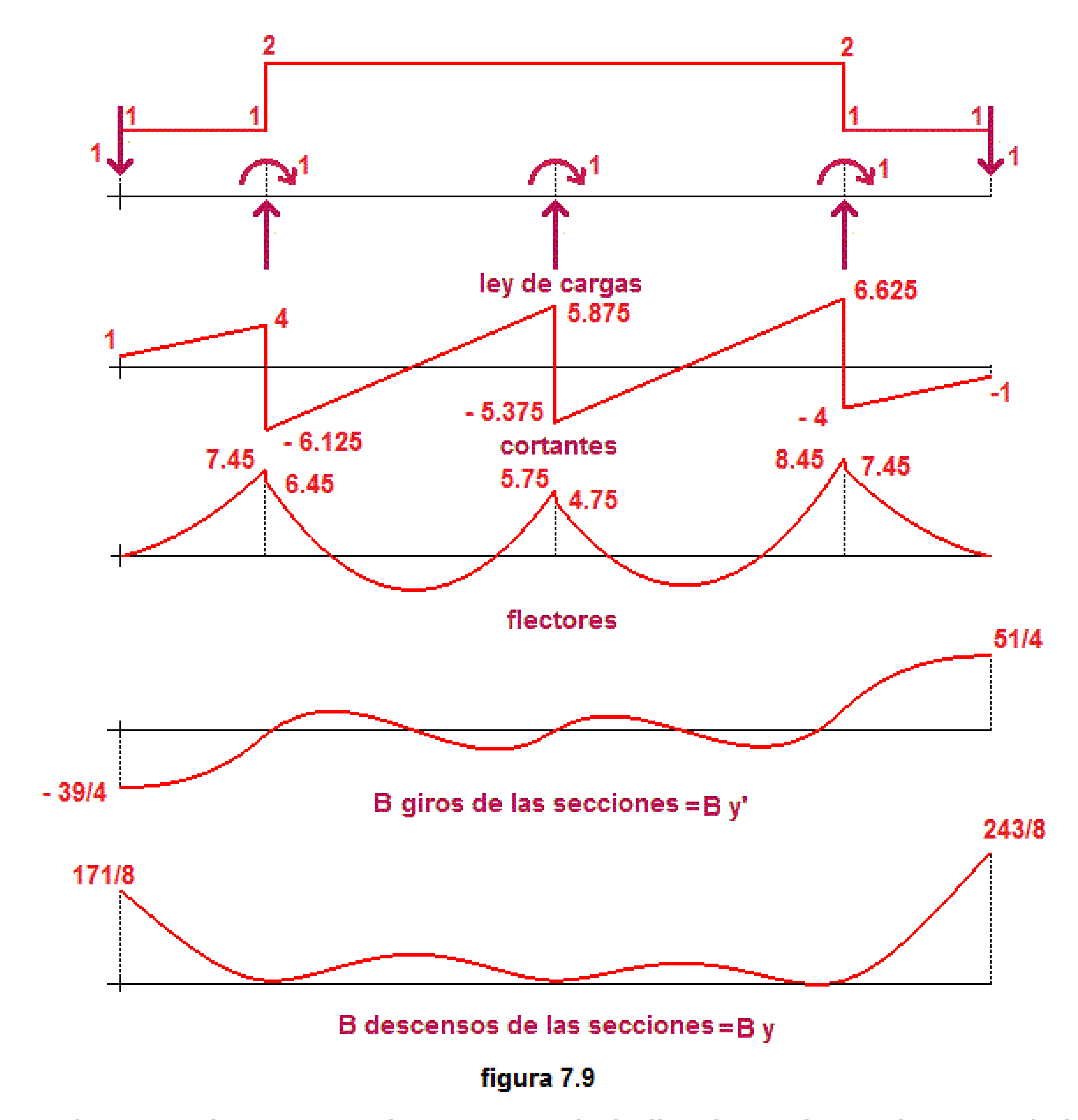


figura 7.9

sección correspondiente. Estas condiciones constituirían las llamadas "condiciones de conjugación de la unión rígida". Es la hipótesis utilizada en los problemas de flexión simple convencionales por lo que habitualmente no se hace referencia explícita a la misma.

Podemos considerar ahora el acoplamiento entre dos sectores de viga de igual rigidez que comparten igual descenso pero dejen libre el giro de ambas secciones y donde los cortantes de la pieza no queden afectados. Este sería el caso de una articulación que puede pasar a denominarse una "rótula" ideal. Sin entrar en el análisis de los modelos físicos y de los condicionantes elásticos o constructivos que permitan hablar de estas uniones entre dos secciones en cualquier punto de una viga de rigidez constante, se pueden tratar de forma análoga las vigas que incluyen estas articulaciones interiores y que venimos denominando vigas "compuestas". Como se sabe el número máximo de "rótulas" incluidas en las vigas está limitado por el grado de hiperestatismo de la estructura. Una rótula más en una pieza convertida ya en isostática impide que toda la estructura o sectores determinados de la misma sean capaces de respuesta a flexión y por lo tanto dejan de ser "vigas". Este acoplamiento en el cual ambos sectores comparten la misma "flecha" pero que consecuentemente el giro de cada sección a ambos lados de la articulación es diferente implica que la curva elástica será una función continua simplemente. Al añadir que el momento de flexión debe de anularse y que la ley de cortantes no queda

afectada por la rótula se completan las "condiciones de conjugación" que definen este otro tipo de uniones.

Limitado el número de estas articulaciones internas por el supuesto de que nos conservemos en el dominio de la flexión simple, podemos resolver las cuatro funciones de estado de vigas "compuestas" de rigidez constante con la misma metodología partiendo de la fórmula (2) para cada uno de los sectores en que las rótulas dividen la pieza. La única condición directa que aporta una articulación es inicialmente la de anular la segunda derivada, las dos condiciones restantes son la igualdad de descensos y cortantes en los extremos de los dos tramos de viga que enlazan. Los siguientes ejemplos muestran este procedimiento.

Ejemplo 1.

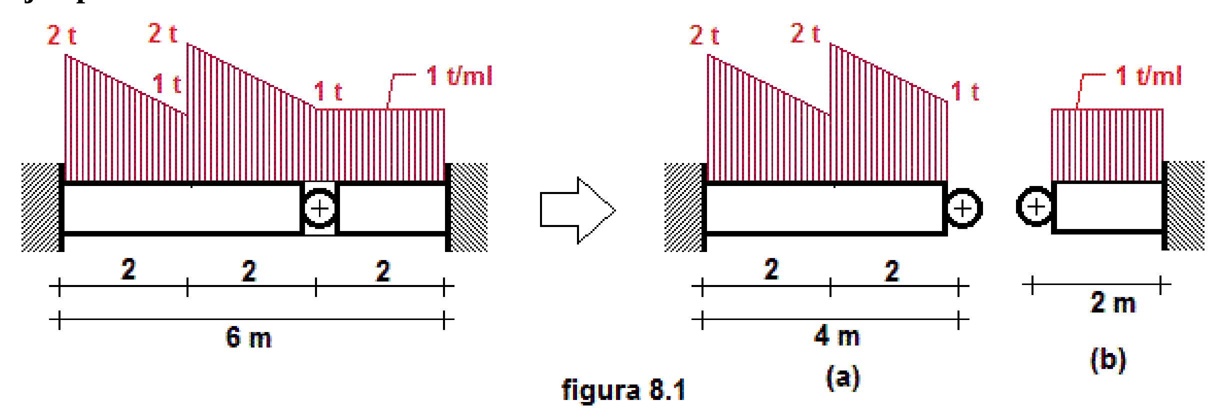


figura 8.1

La rótula de una viga con las dimensiones y cargas de la figura 8.1 separa dos segmentos de la pieza que pueden ser considerados inicialmente como dos vigas de 4 m y 2 m con la articulación en uno de sus extremos respectivamente, como se muestra en la figura 8.1 (b) y (c).

Para la pieza (a) la ley de cargas es

$$w_1(x) = (-\tfrac{1}{2}\ x + 2)\ [u(x) - u(x-2)] + (-\tfrac{1}{2}\ (x-2) + 2)\ [u(x-2) - u(x-4)] = -\tfrac{1}{2}\ x + 2 + u(x-2)+$$

y su función $z_1(x)$ correspondiente es

$$z_1(x) = -\tfrac{1}{240}\ x^5 + \tfrac{1}{12}\ x^4 + \tfrac{1}{24}\ (x-2)^4\ u(x-2)$$

Imponiendo las condiciones del empotramiento en el extremo izquierdo, la función B y(x) y sus derivadas serán

$$B\ y_1(x) = -\tfrac{1}{240}\ x^5 + \tfrac{1}{12}\ x^4 + \tfrac{1}{24}\ (x-2)^4\ u(x-2) + \tfrac{1}{2}\ B\ y_1''(0)\ x^2 + \tfrac{1}{6}\ B\ y_1'''(0)\ x^3$$
$$B\ y_1'(x) = -\tfrac{1}{48}\ x^4 + \tfrac{1}{3}\ x^3 + \tfrac{1}{6}\ (x-2)^3\ u(x-2) + B\ y_1''(0)\ x + \tfrac{1}{2}\ B\ y_1'''(0)\ x^2$$
$$B\ y_1''(x) = -\tfrac{1}{6}\ x^3 + x^2 + \tfrac{1}{2}\ (x-2)^2\ u(x-2) + B\ y_1''(0) + B\ y_1'''(0)\ x$$
$$B\ y_1'''(x) = -\tfrac{1}{2}\ x^2 + 2\ x + (x-2)\ u(x-2) + B\ y_1'''(0)$$

Para la viga (b) de la figura 8.1 la ley de cargas es simplemente $w_2(x) = 1$ y su $z_2(x) = \tfrac{1}{24}\ x^4$ con lo que teniendo en cuenta la única condición de su extremo izquierdo $y''(0) = 0$, la función B y(x) y sus derivadas serán

$$B\ y_2(x) = \tfrac{1}{24}\ x^4 + B\ y_2(0) + B\ y_2'(0)\ x + \tfrac{1}{6}\ B\ y_2'''(0)\ x^3$$
$$B\ y_2'(x) = \tfrac{1}{6}\ x^3 + B\ y_2'(0) + \tfrac{1}{2}\ B\ y_2'''(0)\ x^2$$
$$B\ y_2''(x) = \tfrac{1}{2}\ x^2 + B\ y_2'''(0)\ x$$
$$B\ y_2'''(x) = x + B\ y_2'''(0)$$

Las cinco condiciones $y_1''(4) = 0$, $y_2(2) = 0$, $y_2'(2) = 0$, $y_1(4) = y_2(0)$, $y_1'''(4) = y_2'''(0)$ nos permiten obtener

$$B\, y_1''(0) = \frac{64}{15},\ B\, y_1'''(0) = -\frac{127}{30},\ B\, y_2(0) = \frac{302}{45},\ B\, y_2'(0) = -\frac{73}{15},\ B\, y_2'''(0) = \frac{53}{30}$$

Con estos valores podemos rescribir las funciones de estado en ambos sectores

$$B\, y_1(x) = -\frac{1}{240}\ x^5 + \frac{1}{12}\ x^4 + \frac{1}{24}\ (x-2)^4\, u(x-2) + \frac{64}{30}\, x^2 - \frac{127}{180}\, x^3$$

$$B\, y_1'(x) = -\frac{1}{48}\ x^4 + \frac{1}{3}\ x^3 + \frac{1}{6}\ (x-2)^3\, u(x-2) + \frac{64}{15}\ x - \frac{127}{60}\, x^2$$

$$B\, y_1''(x) = -\frac{1}{6}\ x^3 + x^2 + \frac{1}{2}\ (x-2)^2\, u(x-2) + \frac{64}{15} - \frac{127}{30}\ x$$

$$B\, y_1'''(x) = -\frac{1}{2}\ x^2 + 2\, x + (x-2)\, u(x-2) - \frac{127}{30}$$

$$B\, y_2(x) = \frac{1}{24}\ x^4 + \frac{302}{45} - \frac{73}{15}\, x + \frac{53}{180}\, x^3$$

$$B\, y_2'(x) = \frac{1}{6}\ x^3 - \frac{73}{15} + \frac{53}{60}\, x^2$$

$$B\, y_2''(x) = \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{53}{30}\, x$$

$$B\, y_2'''(x) = x + \frac{53}{30}$$

Bastará ahora considerar la función $B\, y_1(x)$ con sus derivada para valores de $x \in [0,4)$ y $B\, y_2(x-4)$ con sus derivadas en $x \in (4, 6]$ o, más formalmente, reconstruir las cuatro funciones de estado de toda la viga partiendo de la forma

$$y(x) = y_1(x)\, [u(x) - u(x-4)] + y_2(x-4)\, [u(x-4) - u(x-6)] = y_1(x) + (y_2(x-4) - y_1(x))\, u(x-4)$$

en la que en los últimos factores hemos prescindido ya de $u(x)$ y de $u(x-6)$. De esta manera las deformaciones y esfuerzos de toda la barra quedarán determinados por las funciones

$$B\, y(x) = -\frac{1}{240}\ x^5 + \frac{1}{12}\ x^4 + \frac{1}{24}\ (x-2)^4\, u(x-2) + \frac{64}{30}\, x^2 - \frac{127}{180}\, x^3 + [\ \frac{1}{24}\ (x-4)^4 + \frac{302}{45} - \frac{73}{15}\, (x-4)$$
$$+ \frac{53}{180}\, (x-4)^3 + \frac{1}{240}\ x^5 - \frac{1}{12}\ x^4 - \frac{1}{24}\ (x-2)^4 - \frac{64}{30}\, x^2 + \frac{127}{180}\, x^3\ ]\ u(x-4)$$

$$B\, y'(x) = -\frac{1}{48}\ x^4 + \frac{1}{3}\ x^3 + \frac{1}{6}\ (x-2)^3\, u(x-2) + \frac{64}{15}\ x - \frac{127}{60}\, x^2 + [\ \frac{1}{6}\ x^3 - \frac{73}{15} + \frac{53}{60}\, x^2 + \frac{1}{48}\ x^4 - \frac{1}{3}\ x^3$$
$$-\frac{1}{6}\ (x-2)^3 - \frac{64}{15}\ x + \frac{127}{60}\, x^2\ ]\ u(x-4)$$

$$M(x) = -\frac{1}{6}\ x^3 + x^2 + \frac{1}{2}\ (x-2)^2\, u(x-2) + \frac{64}{15} - \frac{127}{30}\, x + [\ \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{53}{30}\, x + \frac{1}{6}\ x^3 - x^2 - \frac{1}{2}\ (x-2)^2 - \frac{64}{15}$$
$$+ \frac{127}{30}\, x\ ]\ u(x-4)$$

$$T(x) = -\frac{1}{2}\ x^2 + 2\, x + (x-2)\, u(x-2) - \frac{127}{30} + [\ x + \frac{53}{30} + \frac{1}{2}\ x^2 - 2\, x - (x-2) + \frac{127}{30}\ ]\ u(x-4)$$

que pueden ser representadas en la figura 8.2

Ejemplo 2.

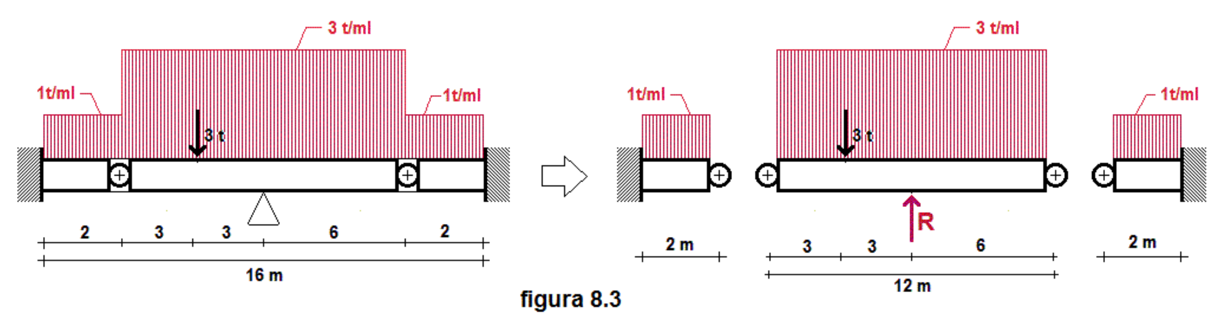


figura 8.3

La viga doblemente empotrada de dos tramos tiene dos articulaciones a 2m de sus extremos, tal y como se muestra en la figura 8.3 junto al resto de dimensiones y solicitaciones. Puede descomponerse en tres vigas como se muestra en la misma figura.

Para la viga empotrada-articulada la ley de cargas es $w_1(x) = 1$ y su $z_1(x) = \frac{1}{24}\ x^4$. Teniendo en cuenta las condiciones de su extremo izquierdo la función $y_1(x)$ y sus derivadas serán

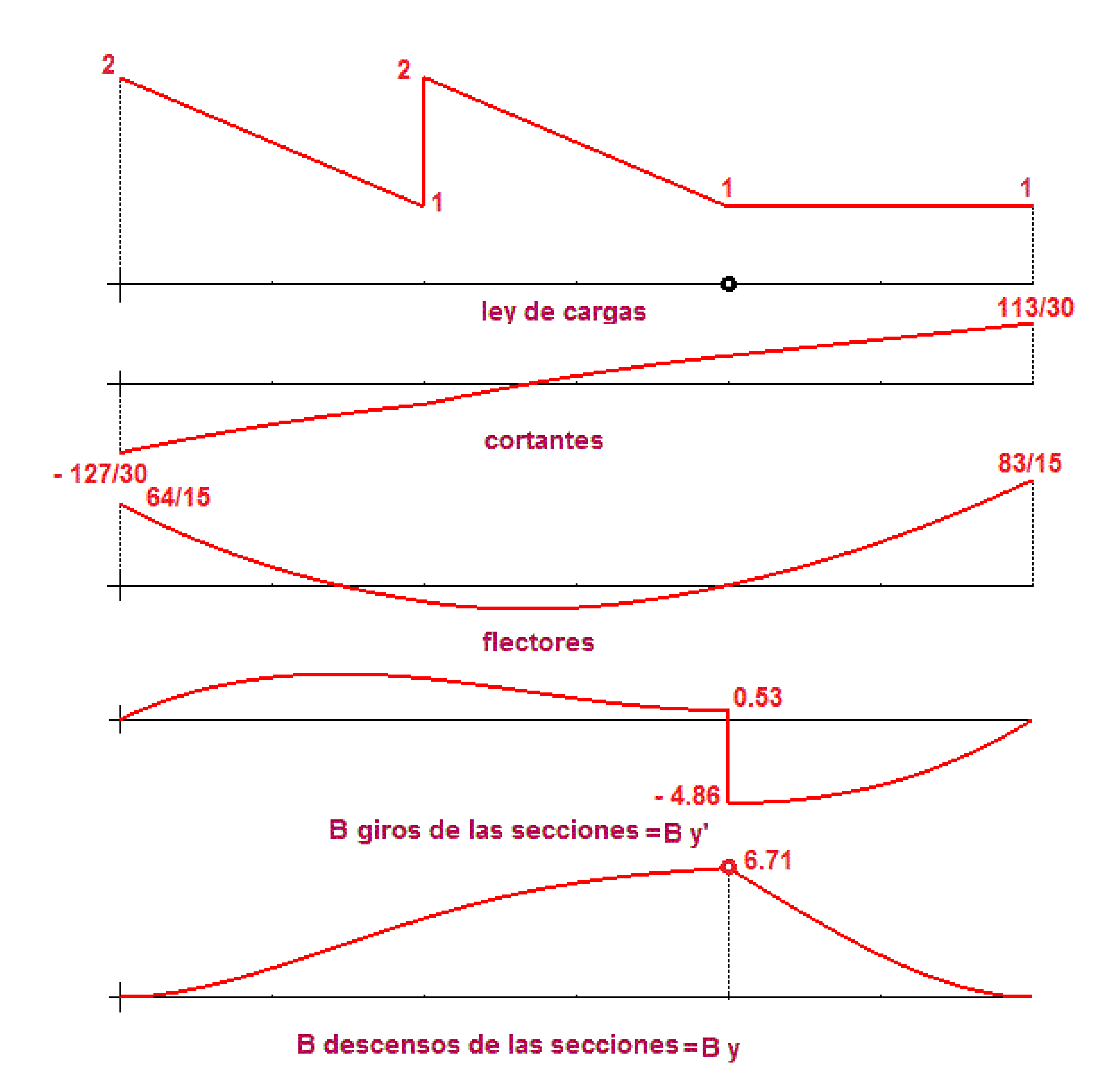


figura 8.2

$B\,y_1(x) = \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{2}\,B\,y_1''(0)\,x^2 + \frac{1}{6}\,B\,y_2'''(0)\,x^3$

$B\,y_1'(x) = \frac{1}{6}\,x^3 + B\,y_1''(0)\,x + \frac{1}{2}\,B\,y_1'''(0)\,x^2$

$B\,y_1''(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + B\,y_1''(0) + B\,y_1'''(0)\,x$

$B\,y_1'''(x) = x + B\,y_1'''(0)$

Para la viga doblemente articulada en sus extremos la función $z_2(x)$ es

$z_2(x) = \frac{1}{8}\,x^4 + \frac{1}{2}\,(x-3)^3\,u(x-3) + \frac{R}{6}\,(x-6)^3\,u(x-6)$

así que la función $y_2(x)$ y sus derivadas serán

$B\,y_2(x) = \frac{1}{8}\,x^4 + \frac{1}{2}\,(x-3)^3\,u(x-3) + \frac{R}{6}\,(x-6)^3\,u(x-6) + B\,y_2(0) + B\,y_2'(0)\,x + \frac{1}{6}\,B\,y_2'''(0)\,x^3$

$B\,y_2'(x) = \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{3}{2}\,(x-3)^2\,u(x-3) + \frac{R}{2}\,(x-6)^2\,u(x-6) + B\,y_2'(0) + \frac{1}{2}\,B\,y_2'''(0)\,x^2$

$B\,y_2''(x) = \frac{3}{2}\,x^2 + 3\,(x-3)\,u(x-3) + R\,(x-6)\,u(x-6) + B\,y_2'''(0)\,x$

$B\,y_2'''(x) = 3\,x + 3\,u(x-3) + R\,u(x-6) + B\,y_2'''(0)$

La viga articulada empotrada la ley de cargas es $w_3(x) = 1$ y su $z_3(x) = \frac{1}{24}\ x^4$. Teniendo en cuenta la condición de su extremo izquierdo la función $y_3(x)$ y sus derivadas serán

$B\ y_3(x) = \frac{1}{24}\ x^4 + B\ y_3(0) + B\ y_3'(0)\ x + \frac{1}{6} B\ y_3'''(0)\ x^3$

$B\ y_3'(x) = \frac{1}{6}\ x^3 + B\ y_3'(0) + \frac{1}{2} B\ y_3'''(0)\ x^2$

$B\ y_3''(x) = \frac{1}{2}\ x^2 + B\ y_3'''(0)\ x$

$B\ y_3'''(x) = x + B\ y_3'''(0)$

Las ecuaciones

$y_1(2) = 0,\ y_2''(12) = 0,\ y_3(2) = 0,\ y_3'(2) = 0$

que son las condiciones del extremo derecho de cada una de las piezas, la condición adicional $y2(6) = 0$ correspondiente al apoyo interior, más las condiciones propias de la articulación

$y_1(2) = y_2(0),\ y_1'''(2) = y_2'''(0),\ y_2(12) = y_3(0),\ y_2'''(12) = y_3'''(0)$

son las nueve ecuaciones que nos permiten obtener

$B\ y_1''(0) = \frac{7781}{448}$, $B\ y_2'''(0) = -\frac{8677}{896}$, $B\ y_2(0) = \frac{2519}{112}$, $B\ y_2'(0) = \frac{17615}{1344}$, $B\ y_2'''(0) = -\frac{6885}{896}$ $B\ y_3(0) = \frac{2071}{112}$

$B\ y_3'(0) = -\frac{18415}{1344}$, $B\ y_3'''(0) = \frac{5541}{896}$, $R = -\frac{11259}{448}$

con lo que podemos reconstruir las funciones de estado de cada sector de la viga original considerado como una viga independiente

$B\ y_1(x) = \frac{1}{24}\ x^4 + \frac{1}{2}\frac{7781}{448}\ x^2 - \frac{1}{6}\frac{8677}{896}\ x^3$

$B\ y_1'(x) = \frac{1}{6}\ x^3 + \frac{7781}{448}\ x - \frac{1}{2}\frac{8677}{896}\ x^2$

$B\ y_1''(x) = \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{7781}{448} - \frac{8677}{896}\ x$

$B\ y_1'''(x) = x - \frac{8677}{896}$

$B\ y_2(x) = \frac{1}{8}\ x^4 + \frac{1}{2}\ (x-3)^3\ u(x-3) - \frac{1}{6}\frac{11259}{448}\ (x-6)^3\ u(x-6) + \frac{2519}{112} + \frac{17615}{1344}\ x - \frac{1}{6}\frac{6885}{896}\ x^3$

$B\ y_2'(x) = \frac{1}{2}\ x^3 + \frac{3}{2}\ (x-3)^2\ u(x-3) - \frac{1}{2}\frac{11259}{448}\ (x-6)^2\ u(x-6) + \frac{17615}{1344} + \frac{1}{2}\frac{6885}{896}\ x^2$

$B\ y_2''(x) = \frac{3}{2}\ x^2 + 3\ (x-3)\ u(x-3) - \frac{11259}{448}\ (x-6)\ u(x-6) + \frac{6885}{896}\ x$

$B\ y_2'''(x) = 3\ x + 3\ u(x-3) - \frac{11259}{448}\ u(x-6) + \frac{6885}{896}$

$B\ y_3(x) = \frac{1}{24}\ x^4 + \frac{2071}{112} - \frac{18415}{1344}\ x + \frac{1}{6}\frac{5541}{896}\ x^3$

$B\ y_3'(x) = \frac{1}{6}\ x^3 - \frac{18415}{1344} + \frac{1}{2}\frac{5541}{896}\ x^2$

$B\ y_3''(x) = \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{5541}{896}\ x$

$B\ y_3'''(x) = x + \frac{5541}{896}$

Pueden ahora considerarse los correspondientes valores relativos de "x" para obtener cualquiera de la funciones de estado en cualquiera de los tres tramos en que se ha descompuesto la viga original o, si se quiere, restableciendo el origen en el extremo izquierdo, obtener los valores del primero para abscisas $x\in[0,2)$, los de $y_2(x-2)$ y sus derivadas para valores $x\in(2,14)$ y los del tercer tramo en la forma $y_3(x-14)$ y sus derivadas para $x\in(14,16]$. En este caso para $x=2$ y $x = 14$ se verifica un salto finito en la derivada primera entre los dos primeros tramos y entre el segundo y tercero, coincidiendo el resto de los valores de las $y(x)$, $y''(x)$ e $y'''(x)$ por lo que no queda en ningún caso valores indefinidos.

Finalmente se restablece la unidad de la pieza reconstruyendo la función

$B\ y(x) = B\ y_1(x) + B\ [y_2(x-2) - y_1(x)]\ u(x-2) + [y_3(x-14) - y_2(x-2)]\ u(x-14)$

y sus derivadas.

De cualquier manera pueden realizarse las gráficas de las funciones de estado que se muestran en la figura 8.4.

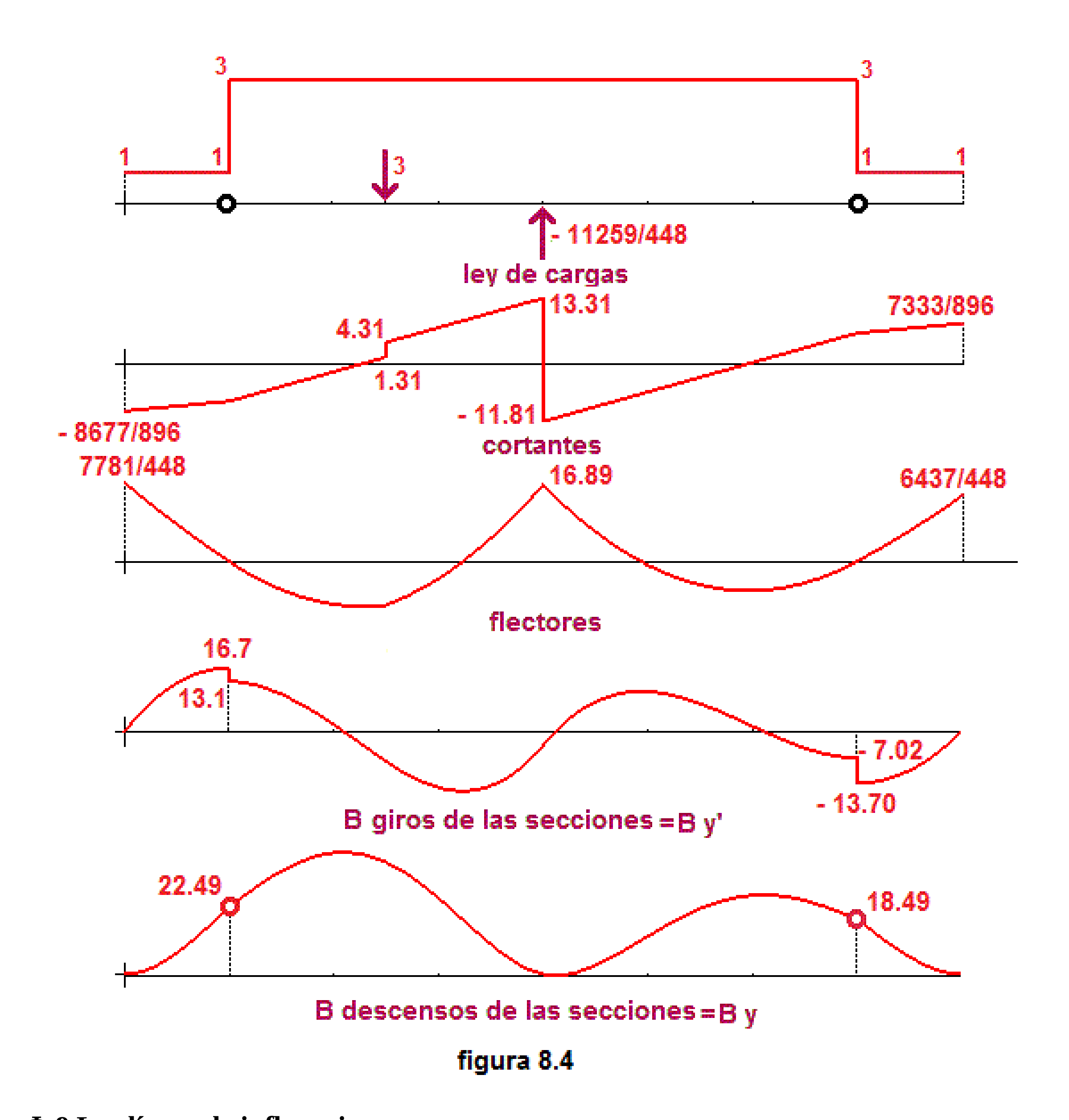


figura 8.4

Φ 9 Las líneas de influencia.

Nos planteamos ahora la posibilidad de considerar como variable la posición de una o varias cargas y como parámetro cualquier abscisa "x" de una viga de longitud "L". Hay un variado conjunto de problemas que explotan esta posibilidad. Para simplificar la exposición consideremos el caso de una carga puntual concentrada Q actuando sobre una viga empotrada-apoyada con rigidez a la flexión constante a lo largo de toda su longitud "L" –figura 9.1– y centrémonos, por ejemplo, en el momento flector de la pieza B y''(x) en cualquier abscisa $x \in [0, L]$. Este momento vendrá expresado según el cuadro 3 por la fórmula

$$M(x) = B\,y''(x) = z''(x) + \frac{z''(L)}{2} - \frac{3\,z\,(L)}{L^2} + \left(\frac{3\,z(L)}{L^3} - \frac{3\,z''(L)}{2\,L}\right) x$$

Q
x
x = a
x = 0
x = L

figura 9.1

Para una posición fija y bien determinada x = a de la carga, la particularizaciones de la función z(x) y de su derivada segunda serán simplemente $z(L) = \frac{1}{6} Q (L–a)^3$, $z''(L) = Q (L–a)$ con lo que el momento flector será

$$M(x) = Q (x–a) u(x–a) + \frac{1}{2} Q (L–a) – \frac{1}{2 L^2} Q (L–a)^3 + (\frac{1}{2 L^3} Q (L–a)^3 – \frac{3}{2 L} Q (L–a)) x$$

Observamos que el segundo miembro es explícitamente una función de dos variables: la posición de la abscisa "x" donde se desea conocer el esfuerzo de flexión y la posición "a" de la carga Q, así que sería más propio escribir M(x, a) y no se hace así porque habitualmente se presume que la posición de la carga es fija.

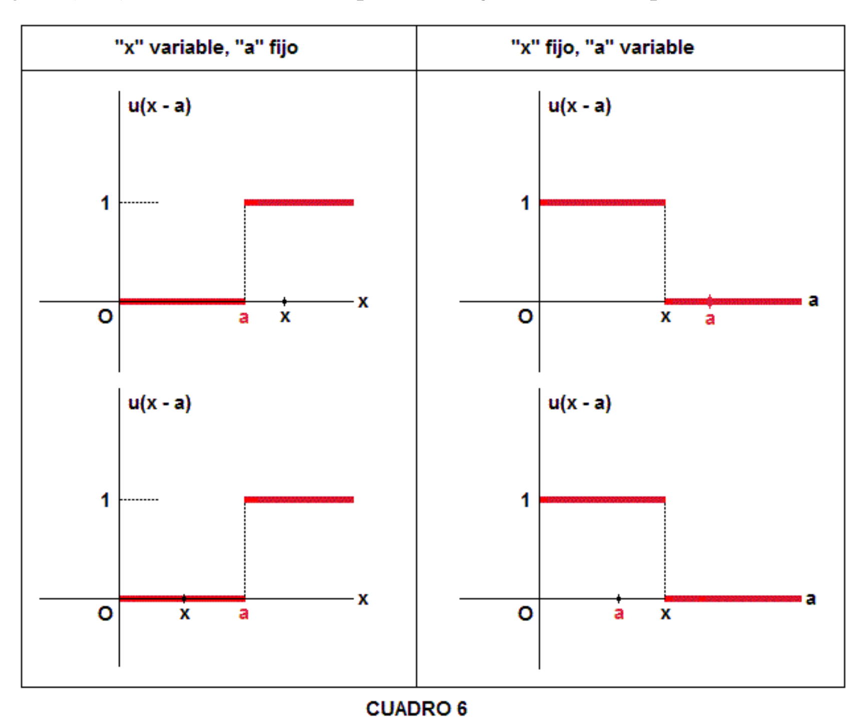
Si invertimos la situación y consideramos la $x = x_i$ fija y bien determinada, se comprende que se desea obtener este esfuerzo en dicha sección así que dispondremos nuevamente de una función con una variable pero esta es ahora la posición de la carga "a"

$$M(a) = Q (x_i–a) u(x_i–a) + \frac{1}{2} Q (L–a) – \frac{1}{2 L^2} Q (L–a)^3 + (\frac{1}{2 L^3} Q (L–a)^3 – \frac{3}{2 L} Q (L–a)) x_i$$

Esta es en esencia el concepto de "línea de influencia", en este caso específicamente la línea de influencia del momento flector en la sección "x_i" al desplazarse una carga concentrada Q que podemos notar $M_{x_i}(a) = M (x_i, a)$

En general, la variable "a" puede tomar valores continuos –o discretos– en un subintervalo cualquiera de [0, L] o bien a lo largo de toda la viga. En la línea de influencia debe precisarse en primer lugar la función de deformación o esfuerzo al que está referida, después la sección en la que está ubicada, la carga o la ley de cargas que varían y finalmente el intervalo de variación de estas.

Esta nueva situación nos obligará a considerar los valores que toma la función escalón u(x–a) con "a" variable y "x" fijo, o sea: los valores que toma $u(x_i–a)$. El siguiente cuadro 6 precisa dichos valores comparándolos con los acostumbrados ("a" fijo, "x" variable) de manera que cuando "a" es variable y "x" fijo, u(x–a) toma el valor cero para a > x y el valor uno para a < x.



CUADRO 6

Independientemente de las posiciones posibles de las cargas variables en el caso, por ejemplo, de empotramientos o apoyo rígidos las líneas de influencia incluyen también a los extremos en cualquiera de los casos. De hecho es muy habitual que en la flexión de vigas estemos muy interesados en la variación de algunos de los esfuerzos o deformaciones en los vínculos extremos (reacciones o momentos en los empotramientos, reacciones en los apoyos, giros en los apoyos…etc.). Si en el

ejercicio propuesto hacemos $x_i = 0$ y $a \in (0, L]$ obtenemos la línea de influencia del momento de empotramiento cuando la carga "Q" se desplaza a lo largo de toda la viga desde el extremo izquierdo al derecho

$$M_0(a) = Q + \frac{1}{2} Q (L-a) - \frac{1}{2\,L^2} Q (L-a)^3 = \frac{1}{2\,L^2} Q\, a^3 - \frac{3}{2\,L} Q\, a^2 + Q\, a + Q$$

De manera análoga siguiendo el cuadro 3, o simplemente derivando, el cortante en la pieza será

$$T(x) = Q\, u(x-a) + \frac{1}{2\,L^3} Q (L-a)^3 - \frac{3}{2\,L} Q (L-a)$$

asi que las líneas de influencia de las reacciones en los extremos, por ejemplo, serían

$$T_0(a) = Q + \frac{1}{2\,L^3} Q (L-a)^3 - \frac{3}{2\,L} Q (L-a) = -\frac{1}{2\,L^3} Q\, a^3 + \frac{3}{2\,L^2} Q\, a^2$$

$$-T_L(a) = -\frac{1}{2\,L^3} Q (L-a)^3 + \frac{3}{2\,L} Q (L-a) = \frac{1}{2\,L^3} Q\, a^3 - \frac{3}{2\,L^2} Q\, a^2 + Q$$

El problema que estamos tratando, sencillo pero relevante, puede ser generalizado para otra distribución de cargas más compleja siempre que, finalmente, su variación pueda ser expresada en función de una sola variable tal como la "a" del ejemplo o bien, alternando cargas móviles con cargas que permanecen fijas que es un problema que se presenta de forma habitual. Estos procedimientos permiten una gran cantidad de variaciones con múltiples aplicaciones.

Se comprende que no solo pueden obtenerse líneas de influencia de esfuerzos que es lo usual sino también de las propias deformaciones. En el problema que nos sirve de guía podemos, por ejemplo, interesarnos por la variación del giro de la sección en el apoyo extremo cuando la carga varía. En este caso, siguiendo el cuadro 3, los giros de cualquier sección vendrán determinados por

$$B\, y'(x) = \frac{1}{2} Q (x-a)^2 u(x-a) + \left(\frac{z''(L)}{2} - \frac{3\, z(L)}{L^2} \right) x + \left(\frac{3\, z(L)}{2\,L^3} - \frac{3\, z''(L)}{4\,L} \right) x^2$$

así que

$$B\, y'(L) = \frac{1}{2} Q (L-a)^2 u(x-a) + \left(\frac{z''(L)}{2} - \frac{3\, z(L)}{L^2} \right) L + \left(\frac{3\, z(L)}{2\,L^3} - \frac{3\, z''(L)}{4\,L} \right) L^2$$

con lo que teniendo en cuenta los valores $z(L)$ y $z''(L)$ obtendremos finalmente

$$B\, \theta_L(a) = \frac{1}{4\,L} Q\, a^3 - \frac{3}{4} Q\, a^2 + Q\, L\, a - \frac{1}{2} Q\, L^2$$

Es fácil, además, extraer ahora de las líneas de influencia diferentes datos de interés general; así, se puede deducir de la línea de influencia del momento en el empotramiento $M_0(a)$ hallada anteriormente la posición de la carga "Q" para que este momento sea máximo sin más que obtener las soluciones de

$$\frac{d}{da} M_0(a) = \frac{3}{2\,L^2} Q\, a^2 - \frac{3}{L} Q\, a + Q = 0$$

Los resultados de esta ecuación son $\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right) L$, de los cuales pertenece al intervalo $[0, L]$ la solución $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) L \approx 0.422\, L$ que es la posición de la carga que proporciona ese momento máximo.

Resumiendo: Las líneas de influencia de una distribución de cargas en una determinada sección de una viga se definen de una manera general como las variaciones del desplazamiento, giro, momento flector o esfuerzo cortante en esta sección cuando la distribución de cargas varía –en función de una sola variable– en un sector del intervalo que subtiende la pieza o eventualmente a lo largo de toda su longitud. Cuando la sección se fija en los extremos es cuando obtendremos las variaciones de las funciones de estado en esos vínculos. Las líneas de influencia simplifican extraordinariamente los cálculos cuando se desea obtener resultados sección-posición de las cargas y son importantes en la determinación de esfuerzos máximos en determinadas secciones sometidas a test. Es, como se puede comprender, un instrumento imprescindible para el análisis de vigas solicitadas por cargas móviles o que pueden variar circunstancialmente de posición. Habitualmente se encuentran en los análisis los casos de acciones unitarias tanto momentos como cargas o impulsos finitos de sobrecargas. A los valores obtenidos para los esfuerzos con acciones unitarias se le han denominado a veces "valores de

influencia". Es fácil comprender que al valor de los efectos debido a acciones no unitarias pueden deducirse fácilmente de estos valores.

Dos ejemplos sencillos completarán la descripción de estos cálculos

Ejemplo 1.

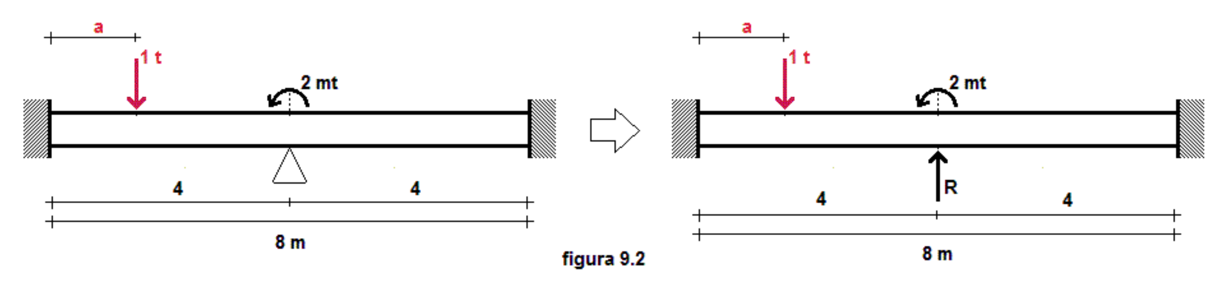


figura 9.2

En este ejemplo consideramos la viga de dos tramos empotrada en sus extremos con las dimensiones y solicitaciones de la figura 9.2 en la que una carga puntual unitaria está a un distancia "a" del empotramiento izquierdo. Se trata de obtener las líneas de influencia de los momentos de empotramiento y las reacciones en los extremos cuando la carga unitaria varía en el primer tramo $a \in [0,4)$. Como aplicaciones complementarias la de encontrar –si las hay– la posición de esta carga para que se anule el momento en el empotramiento izquierdo y la posición para que el momento en el empotramiento derecho sea máximo.

La ley de cargas es aquí $w(x) = \delta(x-a) + 2\,\delta'(x-4) + R\,\delta(x-4)$ y la función z(x) y su primera derivada serán

$$z(x) = \frac{1}{6}(x-a)^3 u(x-a) + (x-4)^2 u(x-4) + \frac{1}{6} R (x-4)^3 u(x-4)$$
$$z'(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2 u(x-a) + 2(x-4) u(x-4) + \frac{1}{2} R (x-4)^2 u(x-4)$$

Los factores

$$\frac{1}{8} z'(8) - \frac{3}{64} z(8) = \frac{1}{128} a^3 - \frac{1}{8} a^2 + \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} R + \frac{1}{4}\,; \quad \frac{1}{256} z(8) - \frac{1}{64} z'(8) = -\frac{1}{1536} a^3 + \frac{1}{128} a^2 - \frac{1}{12} R - \frac{11}{48}$$

son los que entran a formar parte de la función B y(x) que es

$$B\,y(x) = \frac{1}{6}(x-a)^3 u(x-a) + (x-4)^2 u(x-4) + \frac{1}{6} R (x-4)^3 u(x-4) + \left(\frac{1}{128} a^3 - \frac{1}{8} a^2 + \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} R + \frac{1}{4}\right) x^2$$
$$+ \left(-\frac{1}{1536} a^3 + \frac{1}{128} a^2 - \frac{1}{12} R - \frac{11}{48}\right) x^3$$

La condición $y(4) = 0$ nos permite obtener $R = \frac{1}{32} a^3 - \frac{3}{16} a^2$ y con este valor podemos escribir las funciones de estado

$$B\,y(x) = \frac{1}{6}(x-a)^3 u(x-a) + (x-4)^2 u(x-4) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{32} a^3 - \frac{3}{16} a^2\right)(x-4)^3 u(x-4)$$
$$+ \left(\frac{1}{128} a^3 - \frac{1}{8} a^2 + \frac{1}{2} a + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{32} a^3 - \frac{3}{16} a^2\right) + \frac{1}{4}\right) x^2 + \left(-\frac{1}{1536} a^3 + \frac{1}{128} a^2 - \frac{1}{12} R - \frac{11}{48}\right) x^3$$
$$B\,y'(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2 u(x-a) + 2(x-4) u(x-4) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{32} a^3 - \frac{3}{16} a^2\right)(x-4)^2 u(x-4)$$
$$+ 2\left(\frac{1}{128} a^3 - \frac{1}{8} a^2 + \frac{1}{2} a + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{32} a^3 - \frac{3}{16} a^2\right) + \frac{1}{4}\right) x + 3\left(-\frac{1}{1536} a^3 + \frac{1}{128} a^2 - \frac{1}{12} R - \frac{11}{48}\right) x^2$$
$$M(x) = (x-a) u(x-a) + 2 u(x-4) + \left(\frac{1}{32} a^3 - \frac{3}{16} a^2\right)(x-4) u(x-4)$$
$$+ 2\left(\frac{1}{128} a^3 - \frac{1}{8} a^2 + \frac{1}{2} a + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{32} a^3 - \frac{3}{16} a^2\right) + \frac{1}{4}\right) + 6\left(-\frac{1}{1536} a^3 + \frac{1}{128} a^2 - \frac{1}{12} R - \frac{11}{48}\right) x$$
$$T(x) = u(x-a) + \left(\frac{1}{32} a^3 - \frac{3}{16} a^2\right) u(x-4) + 6\left(-\frac{1}{1536} a^3 + \frac{1}{128} a^2 - \frac{1}{12} R - \frac{11}{48}\right)$$

Podemos evaluar ahora

$M(0) = M_0(a) = \frac{3}{64} a^3 - \frac{7}{16} a^2 + a + \frac{1}{2}$ con $a \in [0,4)$

$M(8) = M_8(a) = \frac{1}{64} a^3 - \frac{1}{16} a^2 - \frac{1}{2}$ con $a \in [0,4)$

$T(0) = T_0(a) = -\frac{5}{256} a^3 + \frac{9}{64} a^2 + a - \frac{11}{8}$ con $a \in [0,4)$

$-\,T(8) = -\,T_8(a) = -\,\frac{3}{256}\,a^3 + \frac{3}{64}\,a^2 + \frac{3}{8}$ con $a \in [0,4)$

que son las líneas de influencia de los momentos y reacciones respectivamente en los empotramientos.

La función $M_0(a) = \frac{3}{64}\,a^3 - \frac{7}{16}\,a^2 + a + \frac{1}{2} = 0$ admite efectivamente una raíz real en el intervalo de variación de "a", su valor numérico es $a \approx 1.141$. En las proximidades de ese punto el momento en el empotramiento izquierdo es nulo.

La ecuación $\frac{3}{64}\,a^2 - \frac{1}{8}\,a = 0$ donde el primer miembro es la derivada de la función $M_8(a)$ tiene una raíz en el intervalo de variación de "a" que es $\frac{56}{9} \approx 6.222$ donde el momento tiene el mayor valor absoluto que es $-\,\frac{35}{54} \approx -\,0.648$.

Ejemplo 2.

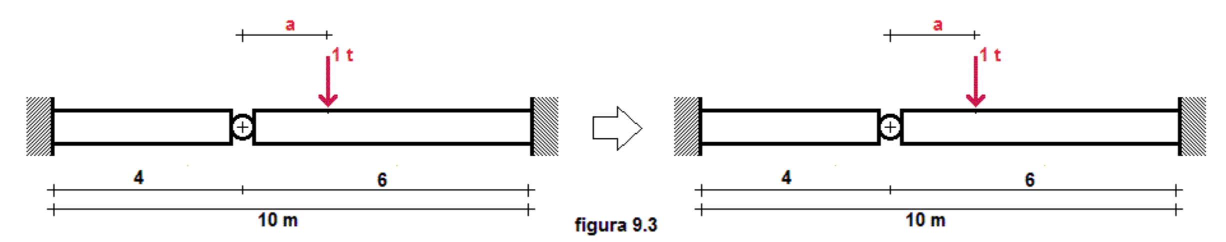


figura 9.3

Aquí tratamos el caso de la viga doblemente empotrada de 10m de longitud con una articulación a 4m del extremo izquierdo solicitada por una carga puntual unitaria que varía en el intervalo (4,10] entre la rótula y su extremo derecho –figura 9.3–. Se trata de obtener la variación del descenso de la articulación en el proceso de variación de la carga (línea de influencia del desplazamiento de la rótula) y las líneas de influencia de los momentos de empotramiento. Como aplicación complementaria nos proponemos hallar la posición de la carga –si la hay– para que ambos momentos de empotramiento sean iguales y la ley de flectores correspondiente a ese caso. Acompañaremos aquí el cálculo de estas funciones con las correspondientes gráficas.

Las funciones de estado de los dos sectores segregados por la rótula serán

$B\,y_1(x) = \frac{1}{2}\,B\,y_1''(0)\,x^2 + \frac{1}{6}\,B\,y_1'''(0)\,x^3$

$B\,y_1'(x) = B\,y_1''(0)\,x + \frac{1}{2}\,B\,y_1'''(0)\,x^2$

$B\,y_1''(x) = B\,y_1''(0) + B\,y_1'''(0)\,x$

$B\,y_1'''(x) = B\,y_1'''(0)$

$B\,y_2(x) = \frac{1}{6}\,(x-a)^3\,u(x-a) + B\,y_2(0) + B\,y_2'(0)\,x + \frac{1}{6}\,B\,y_2'''(0)\,x^3$

$B\,y_2'(x) = \frac{1}{2}\,(x-a)^2\,u(x-a) + B\,y_2'(0) + \frac{1}{2}\,B\,y_2'''(0)\,x^2$

$B\,y_2''(x) = (x-a)\,u(x-a) + B\,y_2'''(0)\,x$

$B\,y_2'''(x) = u(x-a) + B\,y_2'''(0)$

De las condiciones $B\,y_1''(4) = 0$, $B\,y_2(6) = 0$, $B\,y_2'(6) = 0$, $B\,y_1(4) = B\,y_2(0)$, $B\,y_1'''(4) = B\,y_2'''(0)$, se obtienen fácilmente

$B\,y_1''(0) = \frac{1}{140}\,a^3 - \frac{27}{35}\,a + \frac{108}{35}$, $B\,y_1'''(0) = -\,\frac{1}{560}\,a^3 + \frac{27}{140}\,a - \frac{27}{35}$,

$B\,y_2(0) = \frac{4}{105}\,a^3 - \frac{144}{35}\,a + \frac{576}{35}$, $B\,y_2'(0) = \frac{9}{280}\,a^3 - \frac{1}{2}\,a^2 + \frac{177}{70}\,a - \frac{144}{35}$, $B\,y_2'''(0) = -\,\frac{1}{560}\,a^3 - \frac{27}{140}\,a - \frac{27}{35}$

con lo que pueden reconstruirse las funciones de estado anteriores o bien formalizarse el conjunto de ambos tramos con las funciones $B\,y(x) = B\,y_1(x) + (\,B\,y_2(x) - B\,y_1(x)\,)\,u(x-4)$ y sus derivadas, donde se han de terner en cuenta los valores hallados anteriormente.

Los descensos de la articulación vendrán determinados por la función $B\,y_1(4) = B\,y_2(0)$, o sea

$B\,y_{1_4}(a) = B\,y_{2_0}(a) = \frac{4}{105}\,a^3 - \frac{144}{35}\,a + \frac{576}{35}$

que es la línea de influencia del descenso de la articulación y su gráfica será la representada en la figura 9.4

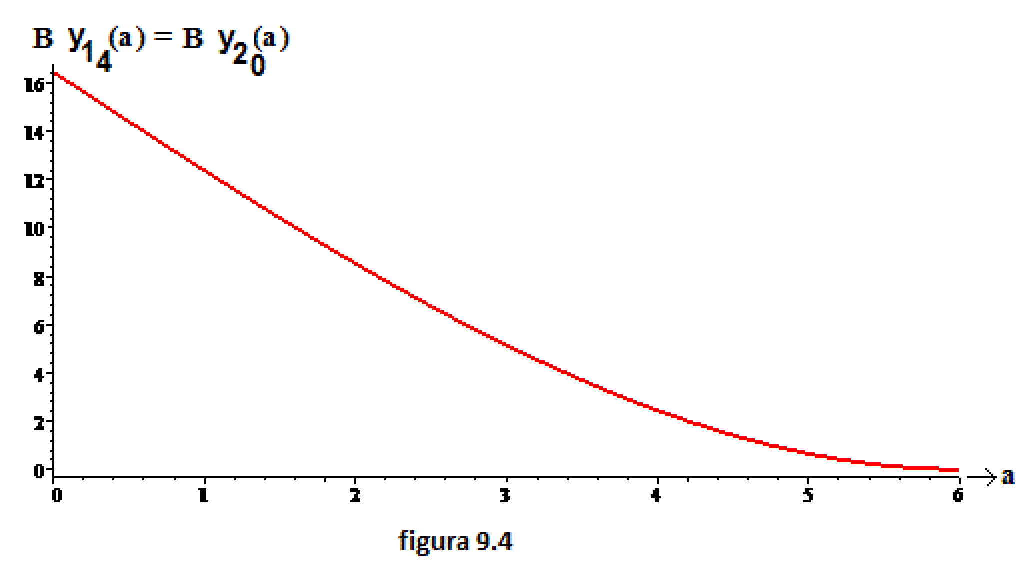


figura 9.4

Las líneas de influencia de los dos momentos de empotramiento serán

$B\,y_1''(0) = M_{1_0}(a) = \frac{1}{140}\,a^3 - \frac{27}{35}\,a + \frac{108}{35}$; $B\,y_2''(6) = M_{2_6} = -\frac{3}{280}\,a^3 + \frac{11}{70}\,a + \frac{48}{35}$

y sus gráficas se representan en la figura 9.5

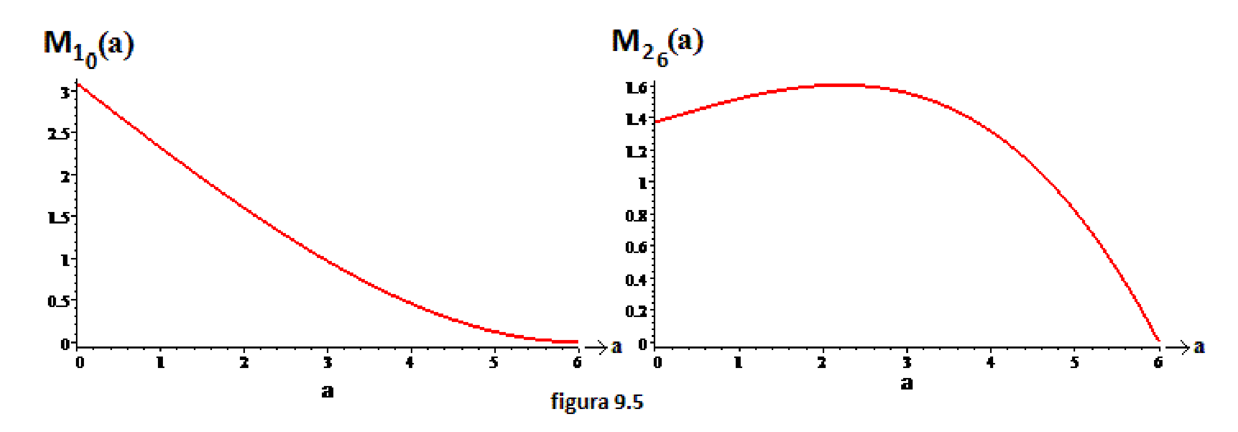


figura 9.5

La igualdad de ambos proporcionan dentro del intervalo de variación de la carga además de la solución a = 6, la raíz a = 2 en la que ambos momentos son iguales a $\frac{8}{5}$ = 1.6. Para esta posición de la carga la gráfica de momentos flectores es la que se presenta en la figura 9.6

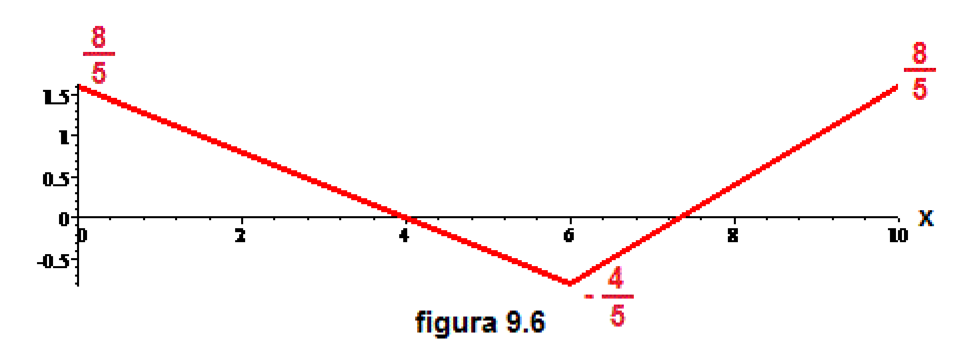
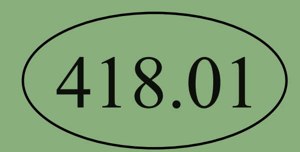


figura 9.6

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

